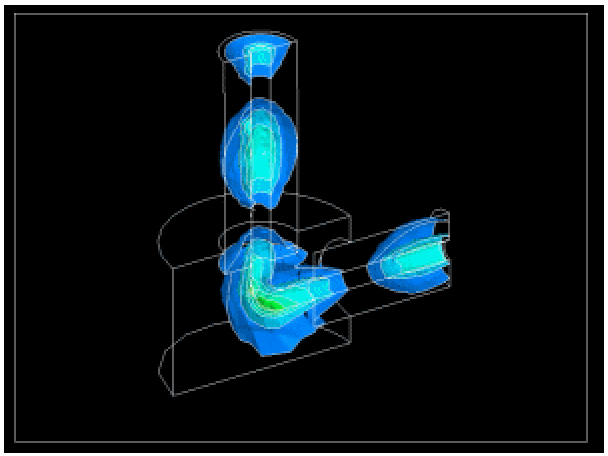
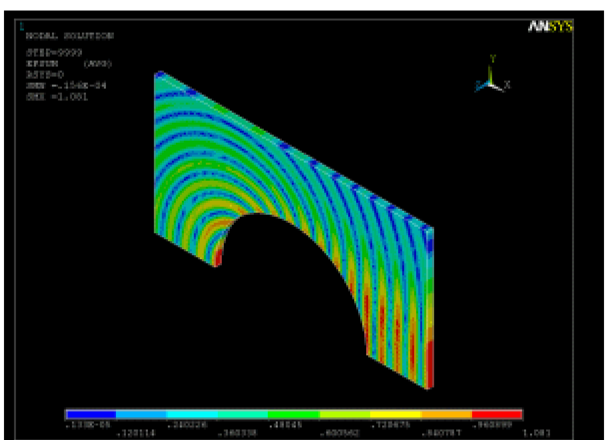
数値解析

2021年度前期　第4週 [5月6日]





静岡大学
創造科学技術大学院
情報科学専攻
工学部機械工学科
計測情報講座

三浦 憲二郎

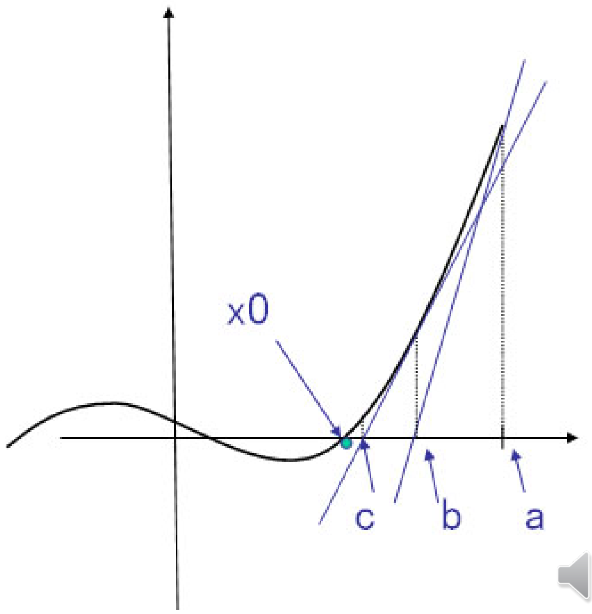
講義アウトライン [5月6日]

- 非線形方程式
  - 2分法

非線形方程式　p.70

- 代数方程式の解　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$
    - 4次方程式までは公式があり，解ける．
    - 5次以上の方程式に代数的解法は存在しない．
    - 数値的に解くしかない．
- 高次の連立方程式，三角関数など変数のn乗で表せない項を含む方程式

$$f(x) = x - \cos x = 0$$



- 数値的に解くしかない．

2分法 p.70

- 定理4.1 （中間値の定理） 関数f(x)は閉区間[a,b]で連続で $f(a) \neq f(b)$ ならば, f(a) と f(b) の間の任意の数 k に対して f(c)=k となる c ($a<c<b$)が存在する.

2分法

- 中間値の定理より, $f(a)\,f(b) < 0$ ならば, $f(c) = 0$, $a < c < b$ となる c が存在する.
- (1) 何らかの方法で $f(a)\,f(b) < 0$ となる閉区間 [a, b] を求める.
- (2) $c_1 = (a+b)/2$
  - (2a) $f(a)\,f(c_1) < 0$ のとき, 解 α は $[a, c_1]$ に存在する.
  - (2b) $f(c_1)\,f(b) < 0$ のとき, 解 α は $[c_1, b]$ に存在する.

  (2a) では [a, b] の代わりに$[a,c_1]$, (2b)では $[c_1, b]$とする.
- ステップ(2)に戻り, 閉区間が十分に小さくなるまで繰り返す

2分法のアルゴリズム p.71

Input a, b, ϵ

Do

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

if $f(a)f(c) < 0$ then

$b \leftarrow c$

else

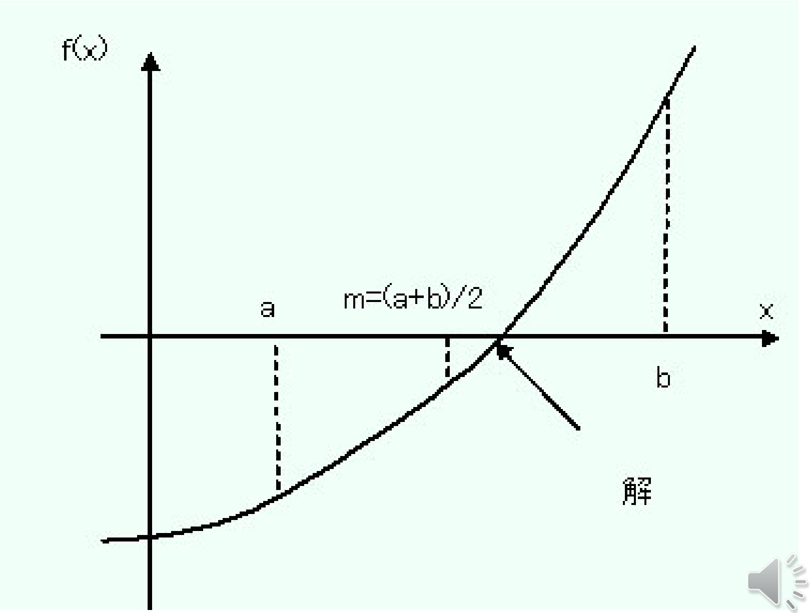
$a \leftarrow c$

end if

while($|a - b| \geq \epsilon$)

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

Output c



2分法

区間 [a, b]に解が1つしか存在しないのならば,

•n回目の区間 $$d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d_{n-2}}{2^2} = \cdots = \frac{d_0}{2^n}$$

•$d_n < \varepsilon$ のときに計算を打ち切るとすると，必要な計算回数nは,

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{d_0}{2^n} < \epsilon \\ n &> \frac{\log(\frac{d_0}{\epsilon})}{\log 2} \end{aligned}$$

を満たす最小の自然数

絶対値誤差 $$|c_n - \alpha| < \frac{d_n}{2}$$

ステップ1) 区間 [a, b] の求め方

- (1) 最初の区間 $[x_{min}, x_{max}]$，および 微小区間の幅 h を与える.
- (2) $n=(x_{max}-x_{min})/h$ として分割数を定め，$x_0=x_{min}$とする.
- (3) $k=1,2,\cdots,n$に対して，$x_k=x_{min}+kh$とし，$f(x_{k-1})\,f(x_k) < 0$ なら $[x_{k-1}, x_k]$ を対象区間にする.

2分法:プログラム

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double bisection(double a,double b,double eps); /* 2分法 */
double f(double x); /* 関数の定義 */
int main(void){
    double a,b,x,h,y1,y2,eps=pow(2.0,-30.0);
    int n;

    printf("初期区間[a,b]を入力してください. ---> a b¥n");
    scanf("%lf%lf",&a,&b);
    printf("区間の分割数nを入力してください. ---> n¥n");
    scanf("%d",&n);

    /* 対象区間を探索しながら2分法を適用 */
    h=(b-a)/n; y1=f(a);
    for(x=a+h;x<=b;x+=h){
        y2=f(x);
        if(y1*y2<0.0){
            printf("求める答えはx=%fです.¥n",bisection(x-h,x,eps));
        }
        y1=y2;
    }
    return 0;
}
```

2分法:プログラム

```
/* 2分法 */
double bisection(double a,double b,double eps){
    double c;

    do{
        c=0.5*(a+b);
        if(f(a)*f(c)<0){
            b=c;
        }
        else{
            a=c;
        }
    }while(fabs(b-a) >=eps);/* fabs()は絶対値を返す.「C言語入門」p.264 */
    c=0.5*(a+b);
    return c;
}

/* 関数の定義 */
double f(double x){
    return x*(x*x*(x*x-5.0)+4.0); /* x*x*x*x*x-5.0*x*x*x+4.0*x */
}
```

プログラム:実行結果

初期区間[a,b]を入力してください. －－－>a b

−3 3

区間の分割数nを入力してください. －－－> n

10

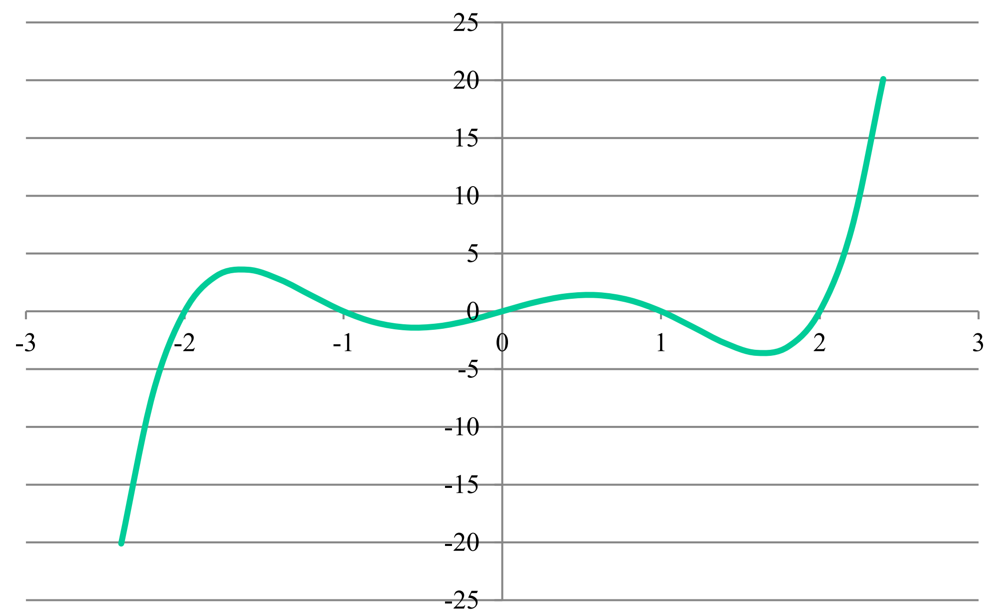
求める答えはx=−2.000000です.

求める答えはx=−1.000000です.

求める答えはx=−0.000000です.

求める答えはx=1.000000です.

求める答えはx=2.000000です.



まとめ

- 非線形方程式
  - 2分法