2021 年度前期　数値解析　第３回講義ノート

2021 年 5 月 6 日　三浦憲二郎

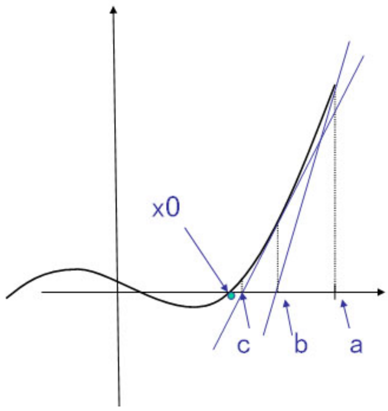
スライド１　講義アウトライン

- 非線形方程式
  - 「　　　　　」法
  - ニュートン法　（「　　　」変数）

スライド２　連立１次方程式　p.70

- 代数方程式の解　　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$
  - 「　　」次方程式までは公式があり，解ける．
  - 「　　」次以上の方程式に代数的解法は存在しない．
  - 数値的に解くしかない．
- 高次の連立方程式，三角関数など変数の「　　　　　」で表せない項を含む方程式

$$f(x) = x - \cos x = 0$$



- 数値的に解くしかない．

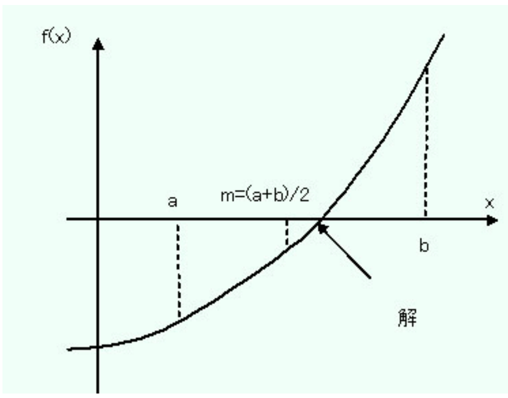
スライド３　２分法　p.70

- 定理 4.1　（「　　　　　　」の定理）
  関数 f(x)は閉区間[a,b]で「　　　　」で $f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 k に対して $f(c)=k$ となる c ($a<c<b$)が存在する．

２分法

- 中間値の定理より，$f(a)\,f(b) < 0$ ならば，$f(c) = 0$，$a < c < b$ となる c が存在する．
- (1) 何らかの方法で　$f(a)\,f(b) < 0$ となる閉区間［a, b］を求める．
- (2) $c_1 = (a+b)/2$
  - (2a)　$f(a)\,f(c_1) < 0$ のとき，解 α は［a, c_1］に存在する．
  - (2b)　$f(c_1)\,f(b) < 0$ のとき，解 α は［c_1, b］に存在する．

  (2a) では［a, b］の代わりに[a,c_1], (2b)では［c_1, b]とする．
- ステップ(2)に戻り，「　　　　　」が十分に小さくなるまで繰り返す



スライド４　２分法のアルゴリズム　p.71

Input a, b, ϵ

Do

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

if $f(a)f(b) < 0$ then

$b \leftarrow c$

else

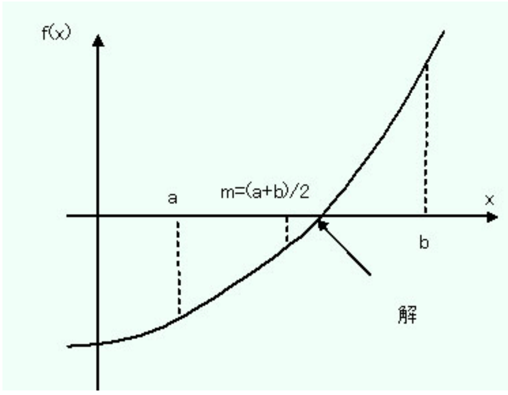
$a \leftarrow c$

end if

while($|a-b| \geq \epsilon$)

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

Output c



（図中の m はアルゴリズムの c に対応）

スライド５　２分法　p.71

区間 [a, b]に解が 1 つしか存在しないのならば,

$$d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d_{n-2}}{2^2} = \cdots = \frac{d_0}{2^n}$$

- n 回目の区間
- d_n < ε のときに計算を打ち切るとすると,

  必要な「　　　　　　　」n は,

$$d_n = \frac{d_0}{2^n} < \epsilon$$

$$n > \frac{\log(\frac{d_0}{\epsilon})}{\log 2}$$

を満たす最小の自然数

「　　　　　　　」誤差

$$|c_n - \alpha| < \frac{d_n}{2}$$

ステップ 1) 区間 [a, b] の求め方

- （1）最初の区間 [x_{min}, x_{max}]，および　微小区間の幅 h を与える.
- （2）n=(x_{max}-x_{min}) / h として分割数を定め，x_0=x_{min} とする.
- （3）k=1,2,…,n に対して，x_k=x_{min}+kh とし，f(x_{k-1}) f(x_k) < 0 なら [x_{k-1}, x_k] を対象区間にする.

スライド６　２分法：プログラム　p.73

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double bisection(double a,double b,double eps); /* 2 分法 */
double f(double x); /* 関数の定義 */
int main(void){
    double a,b,x,h,y1,y2,eps=pow(2.0,-30.0);
    int n;
    printf("初期区間[a,b]を入力してください. ---> a b¥n");
   scanf("%lf%lf",&a,&b);
   printf("区間の分割数 n を入力してください. ---> n¥n");
   scanf("%d",&n);
   /* 対象区間を探索しながら 2 分法を適用 */
   h=(b-a)/n; y1=f(a);
```

```
	for(x=a+h;x<=b;x+=h){
	y2=f(x);
	if(y1*y2<0.0){
		printf("求める答えは x=%f です.¥n",bisection(x-h,x,eps));
	}
	y1=y2;
	}
	return 0;
}
/* 2 分法 */
double bisection(double a,double b,double eps){
	double c;
	do{
		c=0.5*(a+b);
		if(f(a)*f(c)<0){
			b=c;
		}
		else{
			a=c;
		}
	}while(fabs(b-a) >=eps) ; /* fabs()は絶対値を返す.
						/* 「C 言語入門」p.264 */
	c=0.5*(a+b);
	return c;
}
/* 関数の定義 */
double f(double x){
		return x*(x*x*(x*x-5.0)+4.0);
		 /*   x*x*x*x*x-5.0*x*x*x+4.0*x   */
}
```

実行結果

初期区間[a,b]を入力してください. - - ->a b

-3　3

区間の分割数 n を入力してください. - - ->

n

10

求める答えは x=-2.000000 です.

求める答えは x=-1.000000 です.

求める答えは x=-0.000000 です.

求める答えは x=1.000000 です.

求める答えは x=2.000000 です.