令和３年度前期　数値解析　第５回講義ノート

2021 年 5 月 27 日　三浦憲二郎

スライド１　講義アウトライン

- 数値積分
  - 「　　　　　　　　　　　　」公式
    - 「　　　　」公式
    - 「　　　　　　」公式
  - 重積分

スライド２　数値積分の必要性　p.135

- 初等関数とは、複素数を変数とする「　　　　　」関数・「　　　　」関数・「　　　　　」関数主値の四則演算・合成によって表示できる関数である．「　　　　」関数や「　　　　　」関数、そして両者の「　　　　　　」主値も初等関数と考えられる．
- 微分
  - 初等関数の導関数は必ず「　　　　　　」関数になる
- 積分
  - 初等関数の積分は「　　　　」関数であらわされるとは限らない

    例　「　　　　　　」積分

    数値的に積分する以外方法がない！

$$f(t) = \int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}dt$$
$$g(t) = \int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}dt$$

スライド３　ニュートン・コーツ公式　p.135

- 定積分

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

を求めるために, 分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ をとり, $f_k=f(x_k)$を通るラグランジュ補間多項式 $P_n(x)$ を考える．ただし，それぞれの分点は等間隔 $h=(b-a)/n$ で並んでいるとする．$P_n(x)$ は多項式なので以下の I_n を計算することができる．

$$I_n = \int_a^b P_n(x)dx$$
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x)$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f_k \int_a^b l_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k$$
$$\text{where } \alpha_k = \int_a^b l_k(x)dx$$

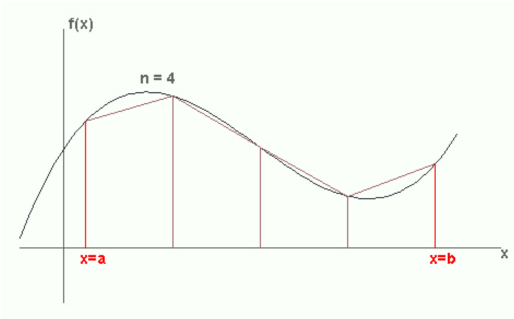
この近似積分公式を n+1 点の「　　　　　　」・「　　　　　」公式(Newton-Cotes)と呼ぶ.

スライド４　台形公式　p.135

- ニュートン・コーツ公式　n=1 とする．h=b-a, x_0=a, x_1=b, x=a+sh

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_a^b l_0(x)dx = \int_a^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = -\frac{1}{h}\int_0^1 h(s-1)hds = \frac{h}{2} \\
\alpha_1 &= \int_a^b l_0(x)dx = \int_a^b \frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx = \frac{1}{h}\int_0^1 sh\cdot hds = \frac{h}{2}
\end{aligned}
$$

Hence $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0+f_1)$



- これを「　　　」公式(Trapezoidal rule)という．

スライド５　台形公式　　p.136

- 実際の計算　区間[a,b]を n 等分．その分点 x_k，各小区間[x_k,x_{k+1}]に適用

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}(f_k+f_{k+1}) \\
&= \frac{h}{2}\{f_0+f_n+2(f_1+f_2+\cdots+f_{n-1})\},\ h=\frac{b-a}{n}
\end{aligned}
$$

- これを「　　　　」台形公式，あるいは「　　　　」公式という．

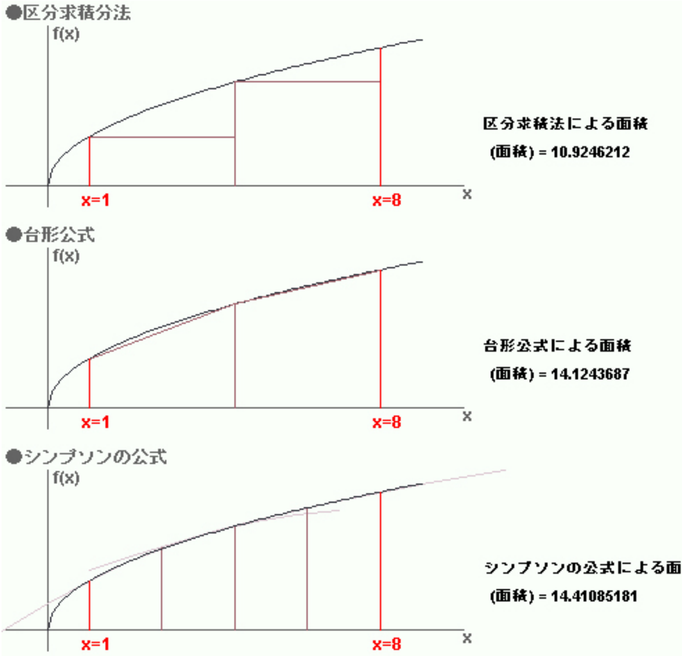
スライド６　台形公式：プログラム　p.137

```
#include <stdio.h>
/* 関数の定義 */
double func1(double x);
double func2(double x);
/* 台形公式 */
double trapezoidal( double a, double b, int n, double (*f)(double) );
int main(void)
{
   int n=100;
   printf("2.0/(x*x)を[1,2]で積分します。分割数は%d です¥n", n);
   printf("結果は%20.15f です¥n",trapezoidal(1.0, 2.0, n, func1) );
   printf("4.0/(1+x*x)を[0,1]で積分します。分割数は%d です¥n", n);
   printf("結果は%20.15f です¥n",trapezoidal(0.0, 1.0, n, func2) );

   return 0;
}
/* 台形公式 */
double trapezoidal( double a, double b, int n, double (*f)(double) )
{
   double T, h;
   int i;

   h = ( b - a ) /n ;   /* 刻み幅の指定 */
   /* 台形公式 */
   T = ( (*f)(a) + (*f)(b) ) / 2.0;
   for ( i = 1; i < n; i++) T += (*f)( a + i*h );
   T *= h;
   return T;
}
```

実行結果

```
2.0/(x*x)を[1,2]で積分します。分割数は 100 です
結果は     1.000029166020881
4.0/(1+x*x)を[0,1]で積分します。分割数は 100 です。
結果は      3.141575986923129
```

```
/* 関数の定義 */
double func1(double x)
{
   return( 2.0/(x*x) );
}
double func2(double x)
{
   return( 4.0 / (1.0+x*x) );
}
```



スライド７　シンプソン公式　p.139

ニュートン・コーツ公式　n=2 とする．h=(b-a)/2, x_0=a, x_1=b+h, x_2=a+2h=b, x=a+sh

$$\alpha_0 = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)dx = \frac{1}{2h^2}\int_0^2 (s-1)(s-2)h^3 ds = \frac{h}{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\int_a^b (x-x_0)(x-x_2)dx = \frac{4}{3}h$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)dx = \frac{h}{3}$$

Hence $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$

これを「　　　　　　　　　　」公式(Ｓｉｍｐｓｏｎ’ｓ　rule)という．

スライド８　シンプソン補間　p.140

実際の計算　区間[a,b]を 2n 等分．その分点 x_k，各小区間[x_{2k},x_{2k+2}]に適用

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{3}(f_{2k}+4f_{2k+1}+f_{2k+2}) \\ &= \frac{h}{3}\{f_0+f_{2n}+4(f_1+f_3+\cdots+f_{2n-1}) \\ &\quad +2(f_2+f_4+\cdots+f_{2n-2})\},\ h=\frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

これを「　　　」シンプソン公式，　あるいは「　　　　　　　　」公式という．

スライド９　シンプソン公式：プログラム　　p.140

```
#include <stdio.h>
/* 関数の定義 */
double func1(double x);
double func2(double x);
/* シンプソン公式 */
double simpson( double a, double b, int n, double (*f)(double) );
int main(void)
{
   int n=50;
   printf("2.0/(x*x)を[1,2]で積分します。分割数は%d です¥n", 2*n);
   printf("結果は%20.15f です¥n",simpson(1.0, 2.0, n, func1) );
```

```
    printf("4.0/(1+x*x)を[0,1]で積分します。分割数は%d です¥n", 2*n);
    printf("結果は%20.15f です¥n",simpson(0.0, 1.0, n, func2) );

    return 0;
}
/*  シンプソン公式  */
double simpson( double a, double b, int n, double (*f)(double) )
{
    double S, h;
    int i;

    h = ( b - a ) /( 2.0*n ) ;   /*  刻み幅の指定  */
    /*  シンプソン公式  */
    S = ( (*f)(a) + (*f)(b) ) ;
    for ( i = 1; i < n; i++) {
        S += 4.0*(*f)( a + (2.0*i-1.0)*h ) + 2.0*(*f)( a + 2.0*i*h );
    }
    S += 4.0*(*f)( a + (2.0*n-1.0)*h );
    S *= h/3.0;
    return S;
}
```

```
実行結果
2.0/(x*x)を[1,2]で積分します。分割数は 100 です
結果は      1.000000002582389
4.0/(1+x*x)を[0,1]で積分します。分割数は 100 です。
結果は       3.141592653589754
```

スライド１０　重積分　　p.144

重積分

$$I = \int_a^b \{\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\}dx$$

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

$$I = \int_a^b F(x)dx$$

台形公式

$$I \approx T_n = \frac{h}{2}\{F_0 + F_n + 2(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1}\},\ h = \frac{b-a}{n}$$

シンプソン公式

$$\begin{aligned} I \approx S_{2n} &= \frac{h}{3}\{F_0 + F_{2n} + 4(F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}\} \\ &\quad +2(F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n-2})\},\ h = \frac{b-a}{2n} \end{aligned}$$

スライド１１　重積分　p.144

台形公式　[$\phi(x_i), \Psi(x_i)$]　, $\phi(x_i)=y_0<y_1<\cdots<y_m=\Psi(x_i)$ と m 等分,$k=(y_m-y_0)/m$

$$F(x_i) = \frac{k}{2}\{g_0 + g_n + 2(g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1}\},\ g_i = f(x_i, y_j)$$

シンプソン公式　[$\phi(x_i), \Psi(x_i)$]　, $\phi(x_i)=y_0<y_1<\cdots<y_{2m}=\Psi(x_i)$ と 2m 等分, $k=(y_{2m}-y_0)/2m$

$$\begin{aligned} F(x_i) &= \frac{k}{3}\{g_0 + g_{2m} + 4(g_1 + g_3 + \cdots + g_{2m-1}\} \\ &\quad +2(g_2 + g_4 + \cdots + g_{2m-2})\},\ k = \frac{y_{2m}-y_0}{2m} \end{aligned}$$