

精密工学における曲線・曲面 -CAGDの基礎-

三浦憲二郎 **

Curves and Surfaces in Precision Engineering -Introduction to CAGD-

Kenjiro T. MIURA

Key words: free-form curve and surface, Bézier, B-spline, NURBS, log-aesthetic curve and surface, integral form

1. はじめに

直線や曲線,あるいは直方体や球,さらには複雑な工業製品やポリゴンメッシュなどの幾何オブジェクト(立体)をコンピュータでどのように表現するのか?どのように表現しておけば,生成,変形,表示等の処理が効率よく行なえるのか?これらは現在でも活発に研究されている重要な問題である.これらの問題を扱う学問分野は,形状処理工学,あるいはCAGD(Computer Aided Geometric Design)と呼ばれる.円や双曲線などの曲線や,球面や楕円面,トーラス面などの曲面は限られたパラメータでそれらの形状を記述できるが,記述に多くのパラメータを必要とする自由曲線・曲面はその取扱いが難しく,CAGDにおける主要な研究課題となっている.

精密工学においても,カム曲線の設計¹⁾やロボットアームの軌道生成²⁾に直線や円弧だけでなく,様々な自由曲線が用いられている.特に意匠デザイン分野では,1950年代から自動車の外装設計に自由曲線・曲面が用いられており,それらに関する多様な研究成果が得られており,体系化も進んでいる³⁾.自由曲線・曲面理論は,近似理論⁴⁾や信号処理⁵⁾とも密接に関係しており,ノイズを含む測定データから変数間の関係を明らかにする等精密工学で直面する様々な問題を解決する道具として有効であり,若い技術者にとってその基礎理論を習得していることが望まれる.

本稿では,意匠デザイン分野で代表的に用いられるBézier曲線,B-spline曲線およびNURBS(Non-Uniform Rational B-spline)曲線に的を絞り,それらの基礎事項について解説する.これらの曲線は,図1に示すようにBézier曲線はB-spline曲線に含まれ,B-spline曲線はNURBS曲線に含まれるという包含関係にある.ここで「含まれる」とは,すべてのBézier曲線はB-spline曲線として表すことができるが,B-spline曲線にはBézier曲線として表せない曲線があることを意味する.それらの関係において,なぜ前者では不十分で後者が必要になるかについて理解することが重要である.

近年の研究動向として,コンピュータの性能向上に伴い積分形式でのみ表現可能なクロソイド曲線や,その曲線を空間曲線へ拡張した曲線が意匠デザイン⁶⁾やロボットの軌道生成⁷⁾,さらには動力的な解析⁸⁾に利用されている.そこで,主に意匠デザインでの利用を意図して開発された,クロソイド曲線を含む対数型美的曲線・曲面についても紹介する.

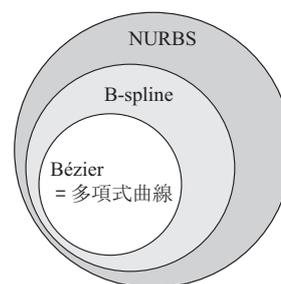


Fig. 1 自由曲線の包含関係

2. 自由曲線・曲面

図1に示したようにBézier曲線は多項式曲線であり,B-spline曲線はそれを構成するセグメント単位で見れば同様に多項式曲線である.両者ともに,与えられたパラメータ t に対して,平面曲線であれば x, y 座標が,空間曲線であればさらに z 座標が t の多項式関数として定まるパラメータ形式⁹⁾の曲線である.これらに対してNURBSは有理式(Rational)であり,多項式/多項式として表される.

各曲線は多項式関数のパラメータ数を1個から2個に増やすことで曲面に拡張することができる.それらの曲面の性質は基となっている曲線の性質に由来することから,この章では主に曲線の性質について述べる.また,曲線のうねりが比較的少なく空間曲線を表現可能な最低の次数であり,実用上3次の曲線が主に使用されていることから3次曲線を具体例に用いて解説する.ただし,NURBS曲線に関しては円錐曲線の代表例である円を厳密に表せる2次曲線を例とする.

2.1 Bézier曲線

3次Bézier曲線は3次多項式曲線であり,

$$C(t) = [1 \ t \ t^2 \ t^3] M [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3]^T \quad (1)$$

と表せる¹⁰⁾.ここで,行列 M は,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

で与えられる.したがって,式(1)は,

$$C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3 \quad (3)$$

* 原稿受付 平成25年9月20日

** 正会員 静岡大学大学院工学研究科(静岡県浜松市中区城北3-5-1)

と変形される。係数 $P_i, i = 0, \dots, 3$ を制御点 (control point) と呼ぶ。制御点は順序付けられた点列であり、3 次 Bézier 曲線が 4 個の制御点で定まることは、3 次多項式に 4 個の係数があることと対応している。曲線が平面曲線か空間曲線かの区別は、制御点が 2 次元の点であるか、3 次元の点であるかによる。3 次 Bézier 曲線の例を図 2 に示す。

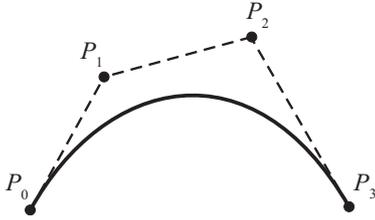


Fig. 2 3 次 Bézier 曲線

次数が n の Bézier 曲線 (n 次 Bézier 曲線) $C(t)$ は次式で与えられる。

$$C(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

ここで、 $B_i^n(t)$ は次数 n のバーンスタイン (Bernstein) 基底関数と呼ばれ、

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

で与えら、

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

は二項係数である。基底関数の「基底」とは、線形代数での基底ベクトルと同じ意味であり、多項式空間を張る基底ベクトルをバーンスタイン関数が構成していることから基底関数と呼ぶ。Bézier 曲線はバーンスタイン基底関数を制御点に乗じて曲線上の点を計算していると考えられ、このように制御点の位置を“混ぜ合わせる”関数を混ぜ合わせ関数 (blending function) と呼ぶ。

この章の冒頭で述べたように、また式 (1) から明らかのように Bézier 曲線は多項式曲線であり、名前から受ける印象ほど特別な曲線ではない。しかしながら、例えば draw 系ソフトの代表例である Illustrator® では自由曲線を表現するために 3 次 Bézier 曲線のみが用いられており、意匠デザインだけでなくグラフィックデザインやコンピュータグラフィックスの分野でもよく用いられている。その理由は、制御点と曲線との関連性が明確であり、端点の位置やそこでの接線を簡単にデザイナーが指定できること³⁾、高速に、かつ頑健に曲線形状が計算できること^{3, 11)}、また曲線全体が制御点から構成される凸包の中に含まれるという凸閉包性¹²⁾を持つこと等による。Bézier 曲線は形状処理工学の黎明期における画期的な成果と認識されており、Pierre Bézier の名前を冠した賞¹³⁾も設立され、この分野で重要な貢献をした研究者に毎年贈呈されている。

Bézier 曲線の欠点は、次数を限定した際の自由度の少なさである。次数を限定すると制御点数、すなわち曲線の自由度が定まり、自由度を上げるには次数を上げなければならないが、高次の曲線は不要なうねりを生じやすい。したがって、工業製品の外形線のような閉じた曲線を生成するには、1 本の

Bézier 曲線ではならず、複数のセグメントをある条件で、例えば接線連続や曲率連続で繋ぐ必要がある。これらの条件は隣接するセグメントの制御点間の幾何学的な関係³⁾として与えられるが、デザイナーにとってはそれらを満足するように制御点を配置するのは困難を伴う。

2.2 B-spline 曲線

前節で述べたセグメント間の連続性の問題を解決するために、形状処理工学分野に導入された曲線が B-spline 曲線¹⁴⁾である。B は basis(基底)を、spline はスプライン関数 (spline function) に基づいていることを意味している。スプライン関数は、多項式を何らかの連続条件を満たすように接続した区分的多項式 (piecewise polynomial) である¹⁵⁾。

次数 (degree) を 3 とすると、位数、あるいは階数 (order ≡ degree + 1) は 4¹⁾であり、曲線を構成する 1 セグメントを定義するのに 4 つの制御点を使用される (図 3 参照)。これは Bézier 曲線と同様 B-spline 曲線が多項式曲線であり、セグメント単位で考えるとそれらの自由度が一致していることを示している。したがって、B-spline 曲線の各セグメントを Bézier 曲線として表すことができる。

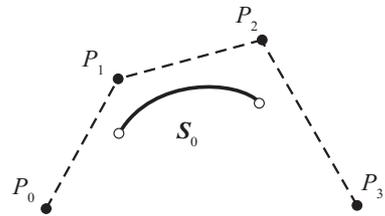


Fig. 3 3 次 B-spline 曲線 (1 セグメント)

次に複数のセグメントからなる B-spline 曲線を考える。3 次ではセグメントごとに 4 点ずつ制御点を 1 点ずつずらしながら使用するよう工夫する (図 4 参照)。個々のセグメントにパラメータのどの値からどの値までを割り当てるかを定めるためにノット列が必要になる。ノット列はノット (スカラー量) を複数並べた数列であり、値が重複することは許されるが単調増加していなければならない。図 3 の例では、ノット列を $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ と指定することで、有効なパラメータ範囲は $0 \leq t \leq 1$ となる。B-spline 曲線を理解するためにはノット列の理解が不可欠であり、以下ではノット列の役割を強調しながら説明する。

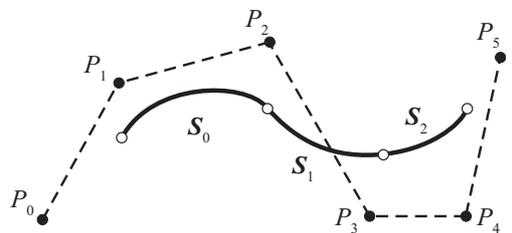


Fig. 4 3 次 B-spline 3 セグメント

図 4 に示したセグメント S_0 は、連続する 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 を使用し、2 本目のセグメント S_1 は、次の連続する 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 を使用する。以下同様にセグメントごとに使

¹⁾有限要素法の教科書では degree と order を区別しない¹⁶⁾ことに注意する。位数を定義するのは、後で説明する de Boor-Cox の漸化式の定義に用いるためである。

用する4点がシフトしていく。セグメント S_0 上の点を $C_0(t)$ 、セグメント S_1 上の点を $C_1(t)$ 、セグメント S_2 上の点を $C_2(t)$ とすると、

$$C_0(t) = N_{0,4}(t)P_0 + N_{1,4}(t)P_1 + N_{2,4}(t)P_2 + N_{3,4}(t)P_3 + 0P_4 + 0P_5$$

$$C_1(t) = 0P_0 + N_{1,4}(t)P_1 + N_{2,4}(t)P_2 + N_{3,4}(t)P_3 + N_{4,4}(t)P_4 + 0P_5$$

$$C_2(t) = 0P_0 + 0P_1 + N_{2,4}(t)P_2 + N_{3,4}(t)P_3 + N_{4,4}(t)P_4 + N_{5,4}(t)P_5$$

と表せる。ここで、 $N_{i,4}(t)$ は i 番目の制御点を係数ベクトルとする混ぜ合わせ関数である。

Bézier 曲線のパラメータ範囲は $0 \leq t \leq 1$ であり、B-spline 曲線でも各セグメントのパラメータがある値 t_0 から $t_0 + 1$ まで変化すると考えることができる。セグメント数が3の場合には、パラメータを0からスタートしてパラメータ範囲は $0 \leq t \leq 3$ とできる²。したがって、 S_0 について $0 \leq t \leq 1$ 、 S_1 について $1 \leq t \leq 2$ 、 S_2 について $2 \leq t \leq 3$ とする(図5参照)。

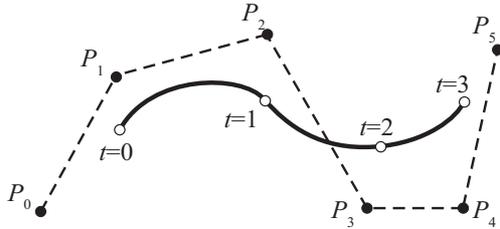


Fig. 5 パラメータ

パラメータ値の変化に伴って、ある制御点の混ぜ合わせ関数の値が0となればその制御点は曲線の定義に無関係となるが、それらを含めた B-spline 曲線の一般式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} C(t) &= N_{0,4}(t)P_0 + N_{1,4}(t)P_1 + N_{2,4}(t)P_2 + N_{3,4}(t)P_3 \\ &\quad + N_{4,4}(t)P_4 + N_{5,4}(t)P_5 + \cdots + N_{n,4}(t)P_n \\ &= \sum_{i=0}^n N_{i,4}(t)P_i \end{aligned} \quad (5)$$

制御点と混ぜ合わせ関数の数は一致し、全部を足しあわせて曲線が定義されるが、パラメータ t が $0 \leq t \leq 1$ でありセグメント S_0 を指し示す場合には、 $N_{4,4}(t) = N_{5,4}(t) = 0$ となり、制御点 P_4 、 P_5 は曲線の形状に寄与しない。混ぜ合わせ関数 $N_{i,4}(t)$ はある範囲の t においてのみ正の値をとり、それ以外では常に0である。この範囲を指定するためにノット列が用いられる。

2.2.1 B-spline 基底関数とノット列

B-spline 曲線の定義に用いる混ぜ合わせ関数を B-spline 基底関数、あるいは基底を略して B-spline 関数と呼ぶ。図6に示すように、位数1の B-spline 関数が0でないノットのパラメータ区間は1区間でありその範囲で値は定数1となる。位数2の B-spline 関数が0でない区間は2区間でありその範囲で値は2個の1次関数のつなぎ合わせとなる。同様に位数3

²パラメータ範囲はノット列により定まり、ノット列を定数倍しても、また各ノット値に同じ定数を足しても曲線の形状は不変であることに注意する³。

ならば3区間で3個の2次関数のつなぎ合わせ、位数4ならば4区間で4個の3次関数のつなぎ合わせとなる。

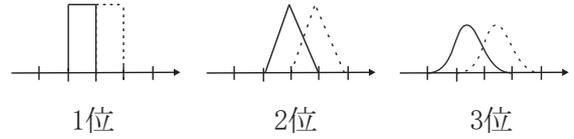


Fig. 6 B-spline 関数

したがって、B-spline 関数1個に対して、1位ならノットは2個、2位なら3個、 M 位なら $(M+1)$ 個指定しなければならない。例えば1セグメントの3次 B-spline 曲線に対しては、位数は4、制御点の数も4であり、混ぜ合わせ関数ごとにまたぐ区間を1つつずらすので8個のノットが必要となる。

ノット列の具体例を以下に示す。図3で示した1セグメントの B-spline 曲線を考え、そのノット列を既に示した $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ とすると、Bézier 曲線に対する式(1)と同様に、

$$C(t) = [1 \ t \ t^2 \ t^3] M_B [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3]^T \quad (6)$$

と表せる¹⁰。ここで、行列 M_B は、

$$M_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

で与えられる。これは B-spline 曲線の1セグメントは Bézier 曲線と同様多項式曲線であることを示している。

図2の Bézier 曲線を B-spline 曲線として表すには、ノット列 $\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$ を指定する。同じ値のノットを重ねることをノットを多重化すると言い、3次曲線に対して4回ノットを多重化することで曲線の端点が制御点と一致する。次節でも少し説明するように、ノットを多重化することでそこでの曲線の連続性が低下していく。詳細については教科書³等を参照していただきたい。

2.2.2 B-spline 関数値の算出法

B-spline 関数値を計算する代表的な方法は de Boor-Cox の漸化式³を用いる方法である。この方法は、まず指定された t における1位(0次)の B-spline 関数値を計算する。次に2位の関数値を求める。必要であればさらに3位、4位、... の関数値を1つ低い位数の関数値から求める。

t_i ($i = 0, \dots, n$) をノット値とする。 t は j 番目のノットから始まる区間にある、したがって $t_j \leq t < t_{j+1}$ と仮定する。1位の B-spline 関数値を、

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

によって計算する。次に、2位の関数値を、

$$N_{i,2}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} N_{i,1}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} N_{i+1,1}(t) \quad (9)$$

で計算する。ただし $0/0 = 0$ とする。さらに、 k 位の関数値を $k-1$ 位の関数値を用いて、

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad (10)$$

により計算する。

この漸化式を図で表すと図 7 となる。この図は $j = 4$ の場合を示しており、 $t_4 \leq t < t_5$ において 1 位の基底関数では $N_{4,1}$ のみが 0 ではなく、他の関数は 0 であることを示している。また、例えば $N_{3,2}$ を計算するには $N_{4,1}$ のみが必要であること、さらに、 $N_{3,3}$ の計算では $N_{3,2}$ と $N_{4,2}$ の値が必要であることを示している。したがって、位数を 1 つ上げた関数値を計算するためには、高々 2 個の低位の関数値が必要となる。

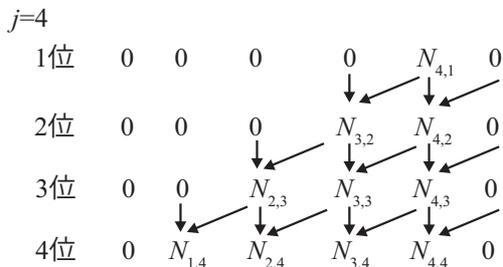


Fig. 7 de Boor-Cox の漸化式

2.2.3 Blossom

B-spline 曲線の性質をより良く理解するために Blossom, あるいは Polar form¹⁷⁾ と呼ばれる定式化が役立つ。これは、1 変数の n 次多項式を n 変数の 1 次式の積に書き直す手法であり、Bézier 曲線に対する de Casteljau アルゴリズム³⁾、前項で説明した de Boor-Cox の漸化式を包含して説明することができる。例えば de Boor-Cox の漸化式による曲線上の点の算出は Blossom の考え方をを用いると、 n 次 B-spline 曲線 $C(t)$ に対してノットに t を n 回挿入し³⁾,

$$C(t) = C_m(t, t, \dots, t) \quad (11)$$

を得ることに一致する。ここで、 $C_m(t, t, \dots, t)$ は $C(t)$ に対応する n 変数の 1 次式の積である。ノット間隔が一定でない非一様 (non-uniform) な場合であっても 2 点間の内分点の計算を繰り返すことで、曲線上の点や各セグメントに対応する Bézier 曲線の制御点を算出することができる。Blossom は幾何学的な操作 (内分点の計算) で B-spline 曲線を把握することを可能とし、実務において B-spline 曲線を使いこなすためにも学ばるべき価値がある。詳細については文献¹⁷⁾を参照いただきたい。

2.2.4 B-spline 曲線の欠点

Bézier 曲線と B-spline 曲線は多項式曲線であり、これらの曲線に共通する欠点は、円などの円錐曲線を正確に表せないことである。円錐曲線は円錐面を平面で切った断面線として得られ、断面をとる平面がどのような角度で円錐面と交差するかにより、円や楕円、放物線、双曲線となる。これらの曲線は工業デザイン分野でもよく用いられており、自由曲線として表せることが望ましい。ただし、ほとんどの場合近似の精度を上げることで対処できること、また境界線に有理曲線を用い曲面を内挿すると大きなうねりが生じる場合があることが指摘されており、次節で述べる有理曲線を使うべきでないとの主張もある¹⁸⁾。

2.3 NURBS 曲線

ここでは、円錐曲線の代表例である円を NURBS 曲線で表すことを考える。円全体を NURBS 曲線で表すためには、その曲線に含まれる各セグメントに円弧を表現させる必要がある。NURBS 曲線のセグメントは Bézier 曲線を有理化した有

理 Bézier 曲線に等しく、円弧は以下で説明するように 2 次有理 Bézier 曲線で表すことができる。

円弧を含む円錐曲線は 3 次元空間の放物線を射影変換することにより得られる³⁾。これは任意の放物線を含む原点を頂点とする円錐が定義でき、その円錐を任意の平面で切断することで円錐曲線が得られるためである。したがって、3 次元空間で 2 次 Bézier 曲線を定義し、それに射影変換を施せば円錐曲線となる。

2 次有理 Bézier 曲線は次式で与えられる。

$$C(t) = \frac{(1-t)^2 w_0 \mathbf{P}_0 + 2(1-t)t w_1 \mathbf{P}_1 + t^2 w_2 \mathbf{P}_2}{(1-t)^2 w_0 + 2(1-t)t w_1 + t^2 w_2} \quad (12)$$

多項式の Bézier 曲線と比較すると、多項式ではなく有理式であり、制御点 \mathbf{P}_i に対して重み w_i が掛けられているとともに、分母は重み w_i を制御点とする Bézier 曲線として与えられている。上式からすぐにわかることは、分母、分子を w_0 で割っても曲線の形状は変わらないことであり $w_0 = 1$ と仮定できる。さらに、射影変換により cross ratio が保存される³⁾ことから、変数 t に有理線形変換を施すことで $w_2 = 1$ と仮定することができる。よって、式 (12) は一般性を失うことなく、

$$C(t) = \frac{(1-t)^2 \mathbf{P}_0 + 2(1-t)t w \mathbf{P}_1 + t^2 \mathbf{P}_2}{(1-t)^2 + 2(1-t)t w + t^2} \quad (13)$$

と書き換えることができる。2 次有理 Bézier 曲線の制御点は 3 点であり、円全体を表現することはできないので、1/3 の円弧を表すことを考える。円の半径を r とし、図 8 のように配置された正三角形に内接する円を作成するために、制御点を $\mathbf{P}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_1 = r(\sqrt{3}, 0)$ および $\mathbf{P}_2 = r(\sqrt{3}/2, 3/2)$ とする。また、それらの制御点の重みを $1, w, 1$ とする。円弧の中点が $r(\sqrt{3}/2, 1/2)$ であることから $w = 1/2$ となる。このとき、 $(x, y) = r((1-t)t\sqrt{3} + t^2\sqrt{3}/2, t^2(3/2))/((1-t)^2 + (1-t)t + t^2)$ であり、 $x^2 + (y-1)^2 = r^2$ を満たしている。

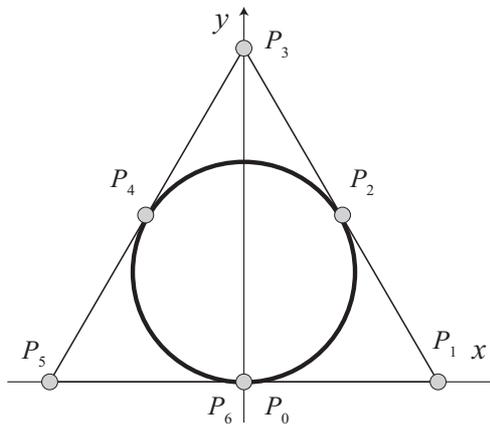


Fig. 8 円を表す NURBS 曲線の制御点

NURBS 曲線の一般式は、式 (10) で定義した B-spline 基底関数 $N_{i,k}(t)$ を用いて

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) w_i} \quad (14)$$

と表される。上式は、制御点が定義されている空間を n 次とすると、 $n+1$ 次の同次座標系³⁾を考え $n+1$ 次元の制御点 ($w_i \mathbf{P}_i, w_i$) が生成する曲線を平面 $w = 1$ に射影変換して得られる曲線と捉えることもできる。

1/3の円弧は2次有理 Bézier 曲線として表されるので、それら3本を滑らかに結ぶように NURBS 曲線を生成する。図8のように、制御点 $P_i, i = 0, \dots, 6$ の7点を用いて閉じた曲線を生成する。このときノット列は、曲線の始点および終点がそれぞれ P_0, P_6 であること、円弧の接続点 P_2, P_4 では、 C^1 連続から連続性が1つ下がり C^0 連続となっていることから、 $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ となる。重みを含めた3次元空間 (wx, wy, w) の曲線（有理式の分子により定まる曲線）は C^0 連続であるが、それらを平面に射影した空間では C^2 連続が保証され曲率も連続（円なので曲率は一定）となっている。

2.4 自由曲面

曲線の定義に用いた基底関数よりテンソル積曲面 (tensor product surface)³⁾ を定義することで自由曲面を表現できる。バーンスタイン基底関数を用いることで Bézier 曲面が定義でき、その曲面は Bézier パッチ (patch) と呼ばれる。次数 $m \times n$ の Bézier 曲面 $S(u, v)$ は次式で与えられる。

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{ij}, \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

ここで、 $B_i^m(u), B_j^n(v)$ は、それぞれ次数 m, n のバーンスタイン基底関数である。 P_{ij} を制御点と呼び、3次元や4次元の点を用いる。とくに4次元の同次座標系で表された制御点を使った場合には有理 Bézier 曲面と呼ぶ。

Bézier 曲面の定義式からわかるように、Bézier 曲線のパラメータの数を1つ増やした、いわば2次元に拡張したのが Bézier 曲面であり、曲線の性質に似た次のような性質を持つ³⁾。1) 制御ネットと曲面形状の類似、2) 凸閉包性、3) 曲面の境界線は、境界の制御点で定義される曲線と与えられる。

曲線の場合と同様、制御ネットから曲面の形状をだいたい予想することができる。ここでの凸閉包性は、曲面の存在範囲がすべての制御点の凸包の内部に限定されるという性質で、曲面間の交線計算のラフチェック等に用いられる。最後の性質は、例えば $v = 0$ のとき、曲面 $S(u, v)$ は、 $B_0^n(0) = 1, B_j^n(0) = 0, (j = 1, \dots, n)$ なので、

$$S(u, 0) = \sum_{i=0}^m B_i^m(u) P_{i0} \quad (15)$$

となり、これは $m + 1$ 個の制御点 $P_{i0}, (i = 0, \dots, m)$ により定義される Bézier 曲線となる。 $v = 1$, あるいは、 $u = 0, u = 1$ とおいても同様である。

上述の議論と同じように、B-spline 基底関数を用いることで B-spline 曲面が、有理式の分子、分母に B-spline 基底関数を用いることで NURBS 曲面が定義できる³⁾。

3. 対数型美的曲線・曲面

対数型美的曲線 (log-aesthetic curve, LA 曲線)¹⁹⁾ は、対数 (等角) らせん、クロソイド曲線、円インボリュート曲線、さらに Nielsen のらせんを含むとともに、接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合であっても対話的な生成、変形が可能であり、実務への応用が期待されている^{19, 20, 21)}。

LA 曲線に関連する最近の研究として、一般化対数型美的曲線 (GLAC) を標準形で定式化するとともに、曲率対数グラフの傾きを曲線長の関数として定式化し、一般化コルニユラセ

³⁾ 曲線の場合と同様、制御点に4次元の同次座標系の点を用いて B-spline 曲面を定義しても NURBS 曲面が得られる。

んではその傾きが1次式で与えられることが報告されている²²⁾。また、不完全ガンマ関数により LA 曲線を解析的に表現する方法が考案され、これまでの定式化に比較して約10倍の速度で曲線を生成できることが示された²³⁾。さらに、Meek ら²⁴⁾ は曲率対数グラフの傾き $\alpha < 0$ において、 G^1 エルミート (Hermite) 内挿における解の一意性を証明しており、徐々に研究が盛んになっている。

3.1 対数型美的曲線の定式化¹⁹⁾

対数型美的曲線の曲率半径 ρ と曲線長 s の関係は以下の式で表わされる。

$$\rho(s) = \begin{cases} e^{cs+d} & (\alpha = 0) \\ (cs+d)^{\frac{1}{\alpha}} & (\alpha \neq 0) \end{cases} \quad (16)$$

ここで、 c, d は定数、 α は曲率対数グラフの傾きである。

曲線の方向角 θ と曲線長 s の関係は $\rho = ds/d\theta$ の関係式から求めることができ、以下のように表される。

$$\theta(s) = \begin{cases} \frac{-1}{c} e^{-cs-d} + \theta_e & (\alpha = 0) \\ \frac{1}{c} \log(cs+d) + \theta_e & (\alpha = 1) \\ \frac{1}{c} \frac{\alpha}{\alpha-1} (cs+d)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \theta_e & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (17)$$

ここで、 θ_e は積分定数である。 θ_e は $s = 0$ での方向角 $\theta(0)$ によって定まる。

曲線上の点 P は、 s の関数として以下のように記述できる。ただし、 i は虚数単位であり、 P は複素平面上の点である。 P_0 は曲線の始点とする。

$$P(s) = P_0 + \begin{cases} e^{i\theta_e} \int_0^s \exp\left(\frac{-i}{c} e^{-cs-d}\right) ds & (\alpha = 0) \\ e^{i\theta_e} \int_0^s \exp\left(\frac{i}{c} \log(cs+d)\right) ds & (\alpha = 1) \\ e^{i\theta_e} \int_0^s \exp\left(\frac{i}{c} \frac{\alpha}{\alpha-1} (cs+d)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) ds & (\text{other}) \end{cases}$$

c, d の値を定めることは曲線のどの部分を用いるかを決定することであり、 α の値によって曲線の形状は変化し、それにしたがって曲線の印象も変化する²⁵⁾。 α 値を変えて得られる曲線の例を図9に示す¹⁹⁾。対数型美的曲線を空間曲線に拡張することも提案されており²⁰⁾、フルネー・セレーの公式³⁾を連立微分方程式と考え、数値積分により曲線の形状を求めることができる。

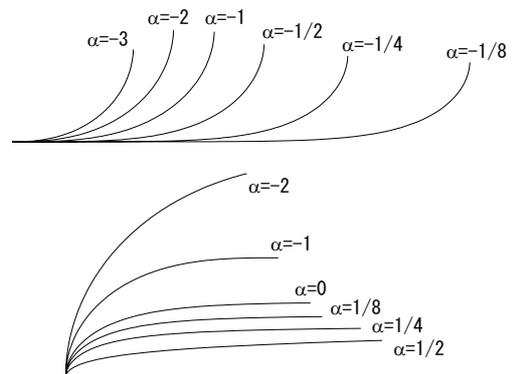


Fig. 9 様々な α 値に対する対数型美的平面曲線

著者の研究グループでは S 字曲線の入力法や LA 平面曲線セグメント3本を1組として用いる G^2 エルミート内挿法²⁶⁾を提案している。図10に実際のCADデータに対して、 G^2 連続となるように曲線を置き換えた例を示す。図10(a)のようなCAD図面の前ドア上部に対して、(b)に示すように3本

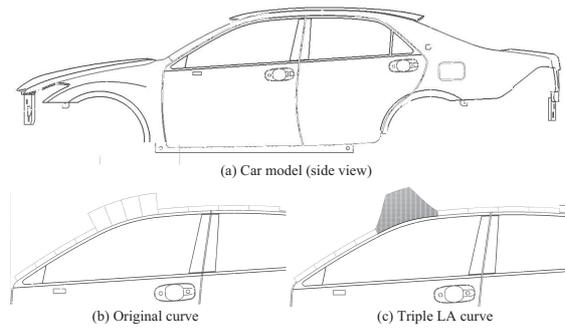
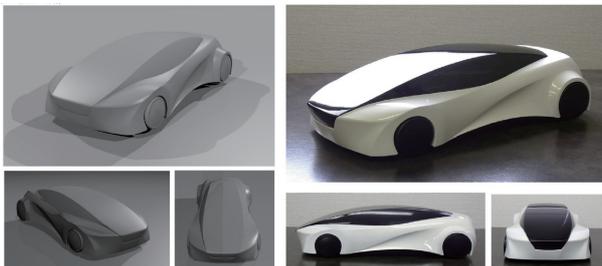


Fig. 10 G^2 連続性を保証する三連 LA 曲線による曲線の置き換え

の曲線の曲率が不連続となっているが、(c) に示すように三連 LA 曲線により中央の曲線を置き換えることで G^2 連続にすることができる。これらのアルゴリズムを市販 CAD システム (McNeel 社製「ライノセラ」) のプラグインとして実装しており、図 11 に示すような工業製品として実用的なレベルの品質を持つ形状モデルを作成することが可能となり、それに基づいて NC データを作成し加工することで、クレイモデル (物理) モデルを作成することもできる²⁷⁾。



(a) アイソパラメトリック曲線とゼブラマッピング



(b) レンダリング、モックアップ

Fig. 11 対数型美的曲線を用いたモデリング例

3.2 変分原理に基づく対数型美的曲線の定式化

式 (16) 第 2 式において、 $\rho^\alpha = \sigma$ と置くと、

$$\sigma = cs + d \quad (18)$$

が得られる。これは、図 12 に示すように横軸を s とし縦軸を $\sigma = \rho^\alpha$ とする 2 次元空間で、2 点 (s_1, σ_1) と (s_2, σ_2) を直線を用いて最短で結ぶと対数型美的曲線が得られることを示している。このとき、

$$J_{LAC} = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 + \sigma_s^2} ds = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2} ds \quad (19)$$

を最小化している。

曲線が一般的なパラメータ t で与えられるとすると、

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt \\ \rho_s &= \frac{\rho_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} \end{aligned} \quad (20)$$

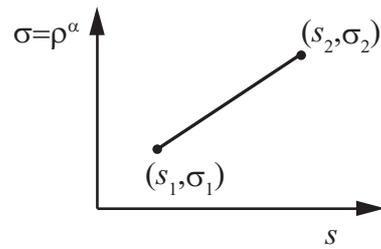


Fig. 12 $s - \sigma$ 平面において 2 点 (s_1, σ_1) と (s_2, σ_2) を結ぶ直線

であることから、式 (19) は次式となる。

$$\begin{aligned} J_{LAC} &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-1} \frac{\rho_t^2}{x_t^2 + y_t^2} \sqrt{x_t^2 + y_t^2}} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_t^2} dt \end{aligned} \quad (21)$$

ここでは、平面曲線の目的関数を示したが、空間曲線に対しても同様の議論が展開でき、その目的関数を求めることができる²⁸⁾。

3.3 対数型美的曲面

積分形式で曲面を定義する試み²⁹⁾ もなされているが、曲線における曲線長のような“自然な”パラメータが曲面には存在せず、パラメータ化の問題を回避するために、変分原理を用いて対数型美的曲面を定義することができる。式 (19) で与えられる対数型美的曲線の目的関数において、曲線の曲率半径 ρ の逆数である曲率 κ を曲面のガウス曲率 $K = \kappa_{max} \kappa_{min}$ に置き換えて、曲面の目的関数へ拡張する³⁰⁾。

この目的関数は曲面のパラメータ u, v に依存する定数 α と β を持ち、対数型美的曲線が最小化している目的関数の曲面への自然な拡張であるとともに、歪エネルギーや曲率微分の面積分などの目的関数の欠点を解消している。さらに、境界条件が決まっても、 α と β の値を変更することで曲面を大域的に変形できることや、特定のパラメータ方向だけを変形する異方性のある変形もできること等が期待される。

4. おわりに

本稿では、自由曲線・曲面を用いた意匠デザインで重要な Bézier 曲線、B-spline 曲線および NURBS 曲線の基礎事項を解説した。また、これまでの多項式や有理式の枠組みを外れて、近年様々な研究が展開されている積分形式でのみ表現可能な対数型美的曲線を紹介した。解説においては形状処理工学の初学者がこの分野の文献を簡単に検索できるように、参考文献を数多く参照するように心がけた。

形状処理工学における最近の話題として、三角関数を基底関数として用いる自由曲線・曲面^{31,32)}、T 型の接点を許す T-spline 曲面^{33,34)}、Isogeometric Analysis(NURBS 立体を用いた解析)¹⁶⁾ 等が挙げられる。紙面の制約によりこれらについては解説できなかったが、精密工学会誌を含めて Computer Aided Geometric Design³⁵⁾、Computer-Aided Design³⁶⁾ 等の学術誌を参照されたい。

最後に、形状処理工学に興味を持たれ、これからその分野について学んでいこうという読者には、著者がそうであったように山口富士夫先生の著書^{12,10)} から読まれることをお勧めする。30 年の時の流れの中でまったく色褪せることなく、高度な内容が平易に簡潔に書かれており、著者を含めた工学系の

研究者・技術者にとって恰好の入門書となっている。

参 考 文 献

- 1) カム機構ハンドブック, 日本カム工業会編集, 日刊工業新聞社, (2001).
- 2) 内山勝, 中村仁彦, 岩波講座ロボット学 2, ロボットモーション, (2004).
- 3) G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD*, 5th Ed., Morgan Kaufmann, (2001).
- 4) P.J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, (1975).
- 5) C.K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, (1992).
- 6) G. Orbay, M.E. Yumer, L.B. Kara, Sketch-Based Aesthetic Product Form Exploration from Existing Images Using Piecewise Clothoid Curves. *Journal of Visual Languages and Computing*, **23**, (2012), 327-339.
- 7) 蘭豊礼, 玉井博文, 三浦憲二郎, 牧野洋, リニアな曲率・振率を持つセグメントによる軌道生成, 精密工学会誌 **78**(7), (2012), 605-610.
- 8) R. Casati, F. Bertails-Descoubes: Super Space Clothoids. *ACM Trans. Graph.* **32**(4): 48 (2013).
- 9) コンピュータグラフィックス, CG-ARTS 協会, (2004).
- 10) 山口富士夫, 形状処理工学 [III], 日刊工業新聞社, (1982).
- 11) R.T. Farouki, V.T. Rajan, On the Numerical Condition of Polynomials in Bernstein form, *Computer Aided Geometric Design*, **4**(3), (1987), 191-216.
- 12) 山口富士夫, 形状処理工学 [I], 日刊工業新聞社, (1982).
- 13) http://solidmodeling.org/bezier_award.html
- 14) R.F. Riesenfeld, Application of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design, Ph.D. dissertation, Syracuse University, Syracuse, NY, (1972).
- 15) 市田浩三, 吉本富士市, スプライン関数とその応用, 教育出版, (1979).
- 16) J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, Y. Bazilevs, *Isogeometric Analysis*, John Wiley and Sons, (2009).
- 17) L. Ramshaw, Blossoms are polar forms, *Computer Aided Geometric Design*, **6**(4), (1989), 323-358.
- 18) L. Piegl, K. Rajab, It is time to drop the “R” from NURBS, 2013 International CAD Conference and Exhibition, Bergamo, Italy, June 15-20, (2013).
- 19) 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 **72**(7), (2006), 857-861.
- 20) 三浦憲二郎, 藤澤誠, 美的曲線の3次元への拡張と B-spline 曲線による近似, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, (2006), 83.
- 21) N. Yoshida, T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, *The Visual Computer (Proc. Pacific Graphics)*, **22**, 9-11, (2006), 896-905.
- 22) R.U. Gobithaasan, K.T. Miura, Aesthetic Spiral for Design, *Sains Malaysiana*, **40**(11), (2011), 1301-1305.
- 23) R. Ziatdinov, N. Yoshida, T. Kim, Analytic Parametric Equations of Log-aesthetic Curves in Terms of Incomplete Gamma Functions, *Computer Aided Geometric Design*, **29**, 2, (2012) 129-140.
- 24) D.S. Meek, T. Saito, D.J. Walton, N. Yoshida, Planar two-point G^1 Hermite interpolating log-aesthetic spirals, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236**(17), (2012), 4485-4493.
- 25) 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, *デザイン学研究*, **42**, 3, (1995) 33.
- 26) 三浦憲二郎, 澁谷大, 白杵深, 蘭豊礼, 玉井博文, 牧野洋, 対数型美的曲線を用いた G^2 Hermite 内挿法, 精密工学会誌, **79**(3), (2013), 260-265.
- 27) K.T. Miura, D. Shibuya, R.U. Gobithaasan, S. Usuki, Designing Log-aesthetic Splines with G^2 Continuity, *Computer-Aided Design & Applications*, **10**(6), (2013), 1021-1032.
- 28) K.T. Miura, S. Usuki, R.U. Gobithaasan, Variational Formulation of the Log-Aesthetic Curve, 14th International Conference on Humans and Computers, pp.215-219, March 9-10, (2012).
- 29) 三浦憲二郎, 単位4元数積分曲面, 情報処理学会論文誌, **41**(3), pp.722-732, (2000)
- 30) K.T. Miura, R. Shirahata, S. Agari, S. Usuki, R.U. Gobithaasan, Variational Formulation of the Log-Aesthetic Surface and Development of Discrete Surface Filters, *Computer-Aided Design & Applications*, **9**(6), pp.901-914, (2012).
- 31) J.W. Zhang, C-curves, An Extension of Cubic Curves, *Computer Aided Geometric Design*. **13**(3), (1996), 199-217.
- 32) Y.W. Wei, W.Q. Shen, G.Z. Wang, Triangular domain extension of algebraic trigonometric Bézier-like basis, *Appl. Math. J. Chinese Univ.*, (2011), 151-160.
- 33) T.W. Sederberg, D.L. Cardon, G.T. Finnigan, N.S. North, J. Zheng, T. Lyche, T-spline simplification and local refinement. *ACM Trans. Graph.* **23**, (2004), 276-283.
- 34) X. Lia, J. Zheng, T.W. Sederberg, T.J.R. Hughes, M.A. Scott, On linear independence of T-spline blending functions, *Computer Aided Geometric Design*, **29**(1), (2012), 63-76.
- 35) <http://www.sciencedirect.com/science/journal/01678396>
- 36) <http://www.sciencedirect.com/science/journal/00104485>