

スライド 1 講義アウトライン

- 数値積分
 - 「 $\int_a^b f(x) dx$ 」公式
 - 「 $\int_a^b f(x) dx$ 」公式
 - 「 $\int_a^b f(x) dx$ 」公式
- 重積分

スライド 2 数値積分の必要性 p.135

- 初等関数とは、複素数を変数とする「 e^x 」関数・「 $\ln x$ 」関数・「 $\sin x$ 」関数主値の四則演算・合成によって表示できる関数である。「 $\cos x$ 」関数や「 $\tan x$ 」関数、そして両者の「 $\arcsin x$ 」主値も初等関数と考えられる。
- 微分
 - 初等関数の導関数は必ず「 e^x 」関数になる

- 積分
 - 初等関数の積分は「 e^x 」関数であらわされるとは限らない
 - 例 「 $\int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$ 」積分
 - 数値的に積分する以外方法がない！

$$f(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$$

$$g(t) = \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt$$

スライド 3 ニュートン・コーツ公式 p.135

- 定積分

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

を求めるために、分点 $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$ をとり、 $f_k=f(x_k)$ を通るラグランジュ補間多項式 $P_n(x)$ を考える。ただし、それぞれの分点は等間隔 $h=(b-a)/n$ で並んでいるとする。 $P_n(x)$ は多項式なので以下の I_n を計算することができる。

$$I_n = \int_a^b P_n(x) dx$$

$$P_n = \sum_{k=0}^n f_k l_k(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{k=0}^n f_k \int_a^b l_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \alpha_k f_k$$

$$\text{where } \alpha_k = \int_a^b l_k(x) dx$$

この近似積分公式を $n+1$ 点の「 $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \alpha_k f_k$ 」・「 $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \alpha_k f_k$ 」公式(Newton-Cotes)と呼ぶ。

スライド4 台形公式 p.135

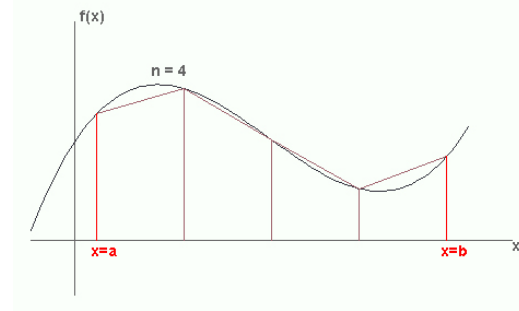
- ニュートン・コーツ公式 $n=1$ とする. $h=b-a, x_0=a, x_1=b, x=a+sh$

$$\alpha_0 = \int_a^b l_0(x)dx = \int_a^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx = -\frac{1}{h} \int_0^1 h(s-1)hds = \frac{h}{2}$$

$$\alpha_1 = \int_a^b l_1(x)dx = \int_a^b \frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx = \frac{1}{h} \int_0^1 sh \cdot hds = \frac{h}{2}$$

Hence $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$

- これを「 $\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$ 」公式(Trapezoidal rule)という.



スライド5 台形公式 p.136

- 実際の計算 区間[a,b]を n 等分. その分点 x_k , 各小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ に適用

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}) \\ &= \frac{h}{2}\{f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1})\}, h = \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

- これを「 $\frac{h}{2}(f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}))$ 」台形公式, あるいは「 $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1})$ 」公式という.

スライド6 台形公式：プログラム p.137

```
#include <stdio.h>
/* 関数の定義 */
double func1(double x);
double func2(double x);
/* 台形公式 */
double trapezoidal( double a, double b, int n, double (*f)(double) );
int main(void)
{
    int n=100;
    printf("2.0/(x*x)を[1,2]で積分します。分割数は%d です\n", n);
    printf("結果は%20.15f です\n",trapezoidal(1.0, 2.0, n, func1) );
    printf("4.0/(1+x*x)を[0,1]で積分します。分割数は%d です\n", n);
    printf("結果は%20.15f です\n",trapezoidal(0.0, 1.0, n, func2) );

    return 0;
}
/* 台形公式 */
double trapezoidal( double a, double b, int n, double (*f)(double) )
{
    double T, h;
    int i;

    h = ( b - a ) / n; /* 刻み幅の指定 */
    /* 台形公式 */
    T = ( (*f)(a) + (*f)(b) ) / 2.0;
    for ( i = 1; i < n; i++) T += (*f)( a + i*h );
    T *= h;
    return T;
}
```

実行結果

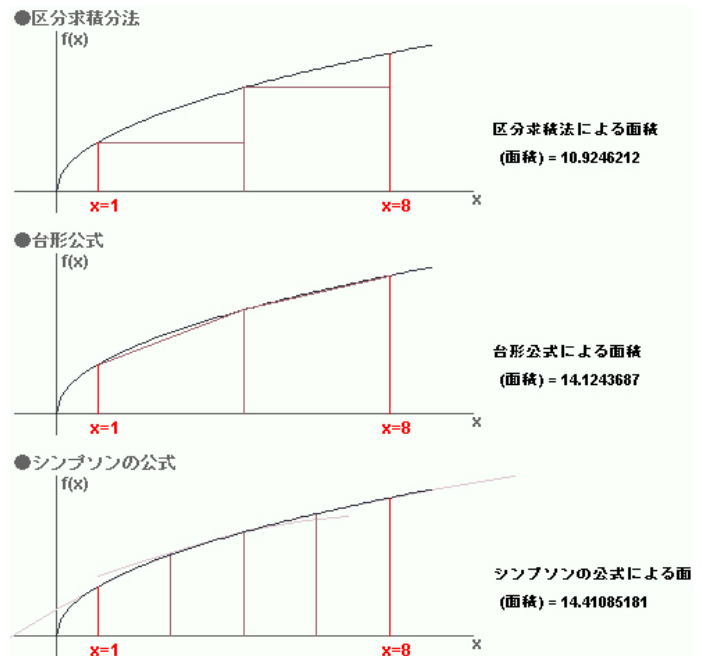
2.0/(x*x)を[1,2]で積分します。分割数は 100 です
 結果は 1.000029166020881

4.0/(1+x*x)を[0,1]で積分します。分割数は 100 です。
 結果は 3.141575986923129

```

/* 関数の定義 */
double func1(double x)
{
    return( 2.0/(x*x) );
}
double func2(double x)
{
    return( 4.0 / (1.0+x*x) );
}

```



スライド7 シンプソン公式 p.139

ニュートン・コーツ公式 $n=2$ とする. $h=(b-a)/2, x_0=a, x_1=b+h, x_2=a+2h=b, x=a+sh$

$$\alpha_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \int_a^b (x - x_1)(x - x_2) dx = \frac{1}{2h^2} \int_0^2 (s - 1)(s - 2)h^3 ds = \frac{h}{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \int_a^b (x - x_0)(x - x_2) dx = \frac{4}{3}h$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \int_a^b (x - x_0)(x - x_1) dx = \frac{h}{3}$$

Hence $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$

これを「 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$ 」公式(Simpson's rule)という.

スライド8 シンプソン補間 p.140

実際の計算 区間[a,b]を $2n$ 等分. その分点 x_k , 各小区間 $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ に適用

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{3}(f_{2k} + 4f_{2k+1} + f_{2k+2})$$

$$= \frac{h}{3}\{f_0 + f_{2n} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2})\}, h = \frac{b-a}{n}$$

これを「 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}))$ 」シンプソン公式, あるいは「 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + f_{2n} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}))$ 」公式という.

スライド9 シンプソン公式 : プログラム p.140

```

#include <stdio.h>
/* 関数の定義 */
double func1(double x);
double func2(double x);
/* シンプソン公式 */
double simpson( double a, double b, int n, double (*f)(double) );
int main(void)
{
    int n=50;
    printf("2.0/(x*x)を[1,2]で積分します。分割数は%d です¥n", 2*n);
    printf("結果は%20.15f です¥n",simpson(1.0, 2.0, n, func1) );
}

```

```

printf("4.0/(1+x*x)を[0,1]で積分します。分割数は%d です¥n", 2*n);
printf("結果は%20.15f です¥n",simpson(0.0, 1.0, n, func2) );

return 0;
}
/* シンプソン公式 */
double simpson( double a, double b, int n, double (*f)(double) )
{
double S, h;
int i;

h = (b - a) / (2.0*n); /* 刻み幅の指定 */
/* シンプソン公式 */
S = ((*f)(a) + (*f)(b));
for (i = 1; i < n; i++) {
S += 4.0*(*f)(a + (2.0*i-1.0)*h) + 2.0*(*f)(a + 2.0*i*h);
}
S += 4.0*(*f)(a + (2.0*n-1.0)*h);
S *= h/3.0;
return S;
}

```

実行結果

2.0/(x*x)を[1,2]で積分します。分割数は 100 です

結果は 1.000000002582389

4.0/(1+x*x)を[0,1]で積分します。分割数は 100 です。

結果は 3.141592653589754

スライド 10 重積分 p.144

重積分

$$I = \int_a^b \left\{ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

$$I = \int_a^b F(x) dx$$

台形公式

$$I \approx T_n = \frac{h}{2} \{F_0 + F_n + 2(F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1})\}, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

シンプソン公式

$$I \approx S_{2n} = \frac{h}{3} \{F_0 + F_{2n} + 4(F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \dots + F_{2n-2})\}, \quad h = \frac{b-a}{2n}$$

スライド 11 重積分 p.144

台形公式 $[\phi(x_i), \Psi(x_i)]$, $\phi(x_i)=y_0 < y_1 < \dots < y_m = \Psi(x_i)$ と m 等分, $k=(y_m-y_0)/m$

$$F(x_i) = \frac{k}{2} \{g_0 + g_n + 2(g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1})\}, \quad g_i = f(x_i, y_j)$$

シンプソン公式 $[\phi(x_i), \Psi(x_i)]$, $\phi(x_i)=y_0 < y_1 < \dots < y_{2m} = \Psi(x_i)$ と $2m$ 等分, $k=(y_{2m}-y_0)/2m$

$$F(x_i) = \frac{k}{3} \{g_0 + g_{2m} + 4(g_1 + g_3 + \dots + g_{2m-1}) + 2(g_2 + g_4 + \dots + g_{2m-2})\}, \quad k = \frac{y_{2m} - y_0}{2m}$$