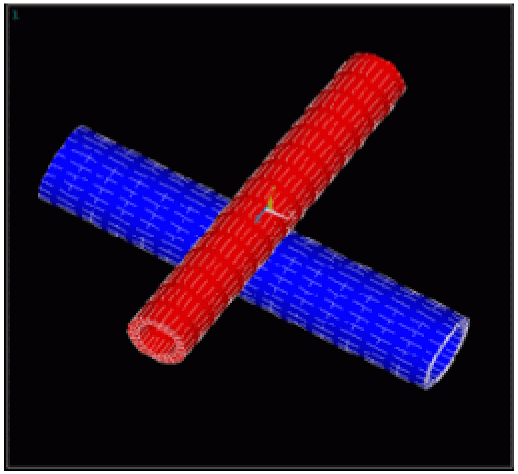
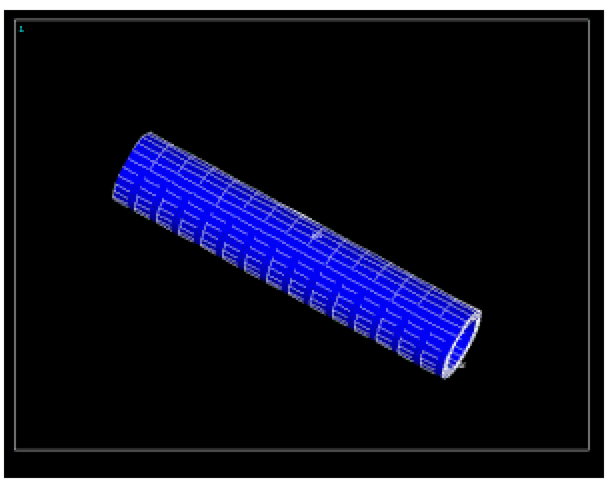
数値解析

2022年度前期　第10週 [6月23日]





静岡大学
工学研究科機械工学専攻
ロボット・計測情報分野
創造科学技術大学院
情報科学専攻

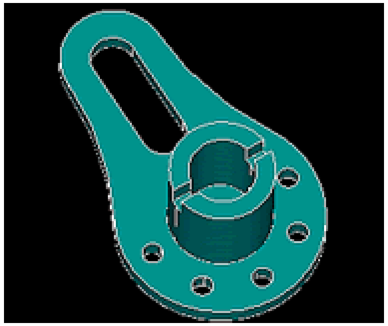
三浦 憲二郎

講義アウトライン [6月23日]

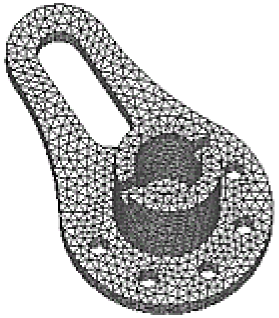
- 連立1次方程式の直接解法
  - ガウス消去法(復習)
  - 部分ピボット選択付きガウス消去法

連立1次方程式

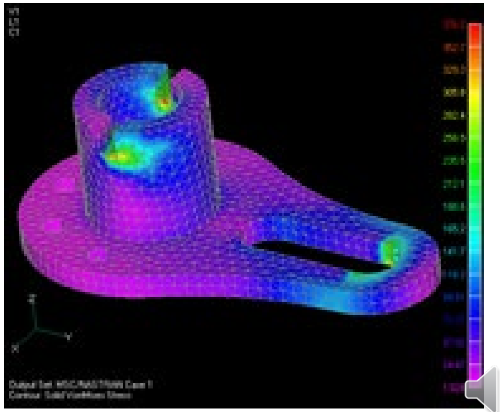
$$Ax = b$$



- 連立1次方程式の重要性



  - 非線形の問題は基本的には解けない.
  - 非線形問題を線形化して解く.
    - 複雑な構造物，単純な要素に分解
    - 各要素に対して線形方程式を立てる.
    - 重ね合わせの原理により統合
    - ただし，変数の数は膨大
    - コンピュータにより数値的に解く.



ガウス消去法

連立1次方程式の解法

$x-y=1$ (1)

$x+2y=4$ (2)

１．代入法

式(1)より $y=x-1$, 式(2)に代入

$x+2(x-1)=4$, したがって$3x=6$, よって$x=2$, 式(1)より$y=1$

２．加減法

式(2)より式(1)を引く：$3y=3$, したがって$y=1$, 式(1)より$x=2$

ガウス消去法は，加減法をコンピュータに適した方法で行う.

ガウス消去法:3元

$$
\begin{aligned}
3x_0 + x_1 + 2x_2 &= 13 \\
5x_0 + x_1 + 3x_2 &= 20 \\
4x_0 + 2x_1 + x_2 &= 13
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 13 \end{bmatrix}
$$

(1) 第1列の2行目と3行目を0にする.
「第1行×(−5/3)+第2行目」
「第1行×(−4/3)+第3行目」

$$
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{13}{3} \end{bmatrix}
$$

(2) 第2列の3行目を0にする.
「第2行×1+第3行」
(1), (2) : 前進消去

$$
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{5}{3} \\ -6 \end{bmatrix}
$$

(3) x3, x2, x1の順に代入して答えを求める.
(3) : 後退代入

ガウス消去法:n元

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

(前進消去)

If $a_{00} \neq 0$

$$\alpha_{i0} = -\frac{a_{i0}}{a_{00}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ 0 & a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + \alpha_{i0} a_{0j}, \;\; b_i^{(1)} = b_i + \alpha_{i0} b_0, \;\; i = 1, 2, \cdots, n-1$$

ガウス消去法:n元

(後退代入)

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2}^{(n-2)} - a_{n-2,n}^{(n-2)} x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}^{(n-2)}}$$

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{kj}^{(k-1)} x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

ガウス消去法:アルゴリズム

行列Aとベクトルbの入力

/* 前進消去 */

$$
\begin{array}{l}
\text{for } k = 0, 1, \cdots, n-2 \\
\quad \text{for } i = k+1, k+2, \cdots, n-1 \\
\quad\quad \alpha \leftarrow -\frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\
\quad\quad \text{for } j = k+1, k+2, \cdots, n-1 \\
\quad\quad\quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} + \alpha a_{kj} \\
\quad\quad \text{end for} \\
\quad\quad b_i = b_i + \alpha b_k \\
\quad \text{end for} \\
\text{end for}
\end{array}
$$

/* 後退代入 */

$$
\begin{array}{l}
\text{for } k = n-1, n-2, \cdots, 0 \\
\quad b_k \leftarrow \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{kj} b_j}{a_{kk}} \\
\text{end for}
\end{array}
$$

bを出力　/* 答えはbに上書き*/

ガウス消去法:プログラム

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 4 /* N次正方行列 */
void input_matrix(double a[N][N],char c,FILE* fin, FILE* fout);
void input_vector(double b[N],char c,FILE* fin,FILE* fout);
void simple_gauss(double a[N][N],double b[N]);
int main(void){
    FILE *fin, *fout;
    double a[N][N], b[N];
    int i;
    if((fin=fopen("input.dat","r"))==NULL) exit(1);
    if((fout=fopen("output.dat","w"))==NULL) exit(1);
    input_matrix(a,'A',fin,fout); input_vector(b,'b',fin,fout);
    simple_gauss(a,b);
    fprintf(fout,"Ax=bの解は次の通りです¥n");
    for(i=0;i<N;i++){ fprintf(fout,"%f¥n",b[i]);}
    fclose(fin); fclose(fout);
    return 0;
}
```

ガウス消去法：プログラム

```
void simple_gauss(double a[N][N],double b[N]){
    int i,j,k;
    double alpha, tmp;
    for(k=0;k<N-1;k++){ /* 前進消去 */
        for(i=k+1;i<N;i++){
            alpha=-a[i][k]/a[k][k];
            for(j=k+1;j<N;j++){
                a[i][j]=a[i][j]+alpha*a[k][j];
            }
            b[i]=b[i]+alpha*b[k];
        }
    }
    b[N-1]=b[N-1]/a[N-1][N-1]; /* 後退代入 */
    for(k=N-2;k>=0;k--){
        tmp=b[k];
        for(j=k+1;j<N;j++){
            tmp=tmp-a[k][j]*b[j];
        }
        b[k]=tmp/a[k][k];
    }
}
```

部分ピボット選択付きガウス消去法

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 2 \\
x_0 + \quad\quad 3x_2 &= 2 \\
3x_0 + x_1 \quad\quad &= -3
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}
$$

(1) 第1列の絶対最大要素:第3行．第1行と第3行を交換

$$
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

(2) 第1列の第2行，第3行を0にする．

$$
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

部分ピボット選択付きガウス消去法

(3) 第2列以下で第2列の絶対最大要素:第3行．第2行と第3行を交換

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(4) 第2列の第3行を0にする．

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

部分ピボット選択付きガウス消去法

n元連立1次方程式、すでに消去作業をk−1回行っていると仮定

1） k回目の消去作業において$|a_{ik}|$(i=k,k+1,･･･,n−1)のうちで最大のものを調べて，その行番号をipとする.

2） ip≠kならば，k行目とip行目を入れ換えて消去作業を行う.

アルゴリズム

$$
\begin{array}{l}
\text{for } k = 0, 1, \cdots, n-2 \\
\quad a\text{max} \leftarrow |a_{kk}|;\ ip \leftarrow k \\
\quad \text{for } i = k+1, k+2, \cdots, n-1 \\
\quad\quad \text{if } |a_{ik}| > a\text{max then} \\
\quad\quad\quad a\text{max} \leftarrow |a_{ik}|;\ ip \leftarrow i \\
\quad\quad \text{end if} \\
\quad \text{end if}
\end{array}
$$

部分ピボット選択付きガウス消去法

アルゴリズム(続き)

```
        amax < ε then
            "A is not regular", exit
        end if
        if ip ≠ k then
            for j = k, k+1, ..., n−1
                a_{kj} ↔ a_{ip,j}
            end for
            b_k ↔ b_{ip}
        end if
    end if
```

ピボット付きガウス消去法：プログラム

```
 void gauss(double a[N][N],double b[N]){
    int i,j,k,ip;
    double alpha, tmp;
     double amax, eps=pow(2.0,-50.0); /* eps=2^{-50}とする */
    for(k=0;k<N-1;k++){
          amax=fabs(a[k][k]); ip=k; /* ピボットの選択 */
          for(i=k+1;i<N;i++){
               if(fabs(a[i][k])>amax){    /* fabs( ); は絶対値を返す. 「C言語入門」p.264
                    amax=fabs(a[i][k]); ip=i;
               }
          }
          if(amax<eps) { /* 正則性の判定 */
               printf("入力した行列は正則ではない!!¥n"); exit(1);
          }
          if(ip!=k){
               for(j=k;j<N;j++){
                    tmp=a[k][j]; a[k][j]=a[ip][j]; a[ip][j]=tmp;
               }
               tmp=b[k]; b[k]=b[ip]; b[ip]=tmp;
          }
          for(i=k+1;i<N;i++){ /* 前進消去 */
            alpha=-a[i][k]/a[k][k];
            for(j=k+1;j<N;j++){
                a[i][j]=a[i][j]+alpha*a[k][j];
            }
            b[i]=b[i]+alpha*b[k];
        }
    }
    b[N-1]=b[N-1]/a[N-1][N-1]; /* 後退代入 */
    for(k=N-2;k>=0;k--){
        tmp=b[k];
        for(j=k+1;j<N;j++){
            tmp=tmp-a[k][j]*b[j];
        }
        b[k]=tmp/a[k][k];
    }
}
```

データ入出力 p.19「C言語入門」p.282)

プログラム2.3改

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 4
void input_matrix(double a[N][N],char c,FILE* fin,FILE* fout);
void input_vector(double b[N],char c,FILE* fin,FILE* fout);
int main(void)
{
    FILE *fin,*fout;
    double a[N][N],b[N];
    if((fin=fopen("input.dat","r"))==NULL){
        printf("ファイルは見つかりません:input.dat ¥n");
        exit(1);
    }
    if((fout=fopen("output.dat","w"))==NULL){
        printf("ファイルが作成できません:output.dat ¥n");
        exit(1);
    }
```

データ入出力　p.19「C言語入門」p.282)

プログラム2.3改 続き

```
    input_matrix(a,'A',fin,fout); /* 行列Aの入出力 */
    input_vector(b,'b',fin,fout); /* ベクトルbの入出力 */

    fclose(fin); fclose(fout);
}
void input_matrix(double a[N][N],char c,FILE* fin,FILE* fout){
    int i,j;
    fprintf(fout,"行列%cは次の通りです¥n",c);
    for(i=0;i<N;++i){
        for(j=0;j<N;++j){
            fscanf(fin,"%lf",&(a[i][j]));
            fprintf(fout,"%5.2f¥t",a[i][j]);
        }
        fprintf(fout,"¥n");
    }
}
```

データ入出力　p.19「C言語入門」p.282)

プログラム2.3改　続き

```
void input_vector(double b[N],char c,FILE* fin,FILE* fout){
    int i;
    fprintf(fout,"ベクトル%cは次の通りです¥n",c);
    for(i=0;i<N;++i){
        fscanf(fin,"%lf",&(b[i]));
        fprintf(fout,"%5.2f¥t",b[i]);
        fprintf(fout,"¥n");
    }
}
```

input.datの内容

```
1.0  2.0  1.0  1.0
4.0  5.0 -2.0  4.0
4.0  3.0 -3.0  1.0
2.0  1.0  1.0  3.0
-1.0 -7.0 -12.0 2.0
```

データ入出力　p.19「C言語入門」p.282)

プログラム2.3改　続き

output.datの内容

```
行列Aは次の通りです.
1.0  2.0  1.0  1.0
4.0  5.0 -2.0  4.0
4.0  3.0 -3.0  1.0
2.0  1.0  1.0  3.0
ベクトルbは次の通りです.
-1.0
-7.0
-12.0
 2.0
```

まとめ

- 連立1次方程式の直接解法
  - ガウス消去法
  - 部分ピボット選択付きガウス消去法

- C言語の基礎
  - 2次元配列
  - データ入出力