

スライド1 講義アウトライン

- 連立1次方程式の直接解法
 - 「」消去法
 - 部分「」選択付きガウス消去法

スライド2 連立1次方程式 p.38

$$Ax = b$$

- 連立1次方程式の重要性
 - 「」の問題は基本的には解けない.
 - 非線形問題を「」化して解く.
 - 複雑な構造物, 「」な要素に分解
 - 各要素に対して「」方程式を立てる.
 - 「」の原理により統合
 - ただし, 変数の数は「」
 - コンピュータにより「」に解く.



スライド3 ガウス消去法 p.38

連立1次方程式の解法

$$x - y = 1 \quad (1), \quad x + 2y = 4 \quad (2)$$

1. 代入法

式(1)より $y = x - 1$, 式(2)に代入 $x + 2(x - 1) = 4$, したがって $3x = 6$, よって $x = 2$, 式(1)より $y = 1$

2. 加減法

式(2)より式(1)を引く: $3y = 3$, したがって $y = 1$, 式(1)より $x = 2$

ガウス消去法は, 「」をコンピュータに適した方法で行う.

スライド4 ガウス消去法 p.38

$$3x_0 + x_1 + 2x_2 = 13$$

$$5x_0 + x_1 + 3x_2 = 20$$

$$4x_0 + 2x_1 + x_2 = 13$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 13 \end{bmatrix}$$

(1) 第1列の2行目と3行目を0にする.

「第1行 $\times (-5/3)$ + 第2行目」

「第1行 $\times (-4/3)$ + 第3行目」

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

(2) 第2列の3行目を0にする.

「第2行 $\times 1$ + 第3行」

(1), (2): 「」消去

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{5}{3} \\ -6 \end{bmatrix}$$

(3) x_3, x_2, x_1 の順に代入して答えを求める.

(3): 「」消去

スライド5 ガウスの消去法：n元 p.39

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

(「
」)

If $a_{00} \neq 0$

$$\alpha_{i0} = -\frac{a_{i0}}{a_{00}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ 0 & a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + \alpha_{i0} a_{0j}, \quad b_i^{(1)} = b_i + \alpha_{i0} b_0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

スライド6 ガウス消去法：n元 p.40

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2}^{(n-2)} - a_{n-2,n}^{(n-2)} x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}^{(n-2)}}$$

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{kj}^{(k-1)} x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

スライド7 ガウス消去法：アルゴリズム p.41

行列 A とベクトル b の入力

/* 前進消去 */

for $k = 0, 1, \dots, n-2$

for $i = k+1, k+2, \dots, n-1$

$$\alpha \leftarrow -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

for $j = k+1, k+2, \dots, n-1$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + \alpha a_{kj}$$

end for

$$b_i \leftarrow b_i + \alpha b_k$$

end for

end for

/* 後退代入 */

for $k = n-1, n-2, \dots, 0$

b を $b_k \leftarrow \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{kj} b_j}{a_{kk}}$ 出力 /* 答えは b に上書き */

end for

スライド8 ガウス消去法：プログラム p.41

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 4 /* N 次正方行列 */
void input_matrix(double a[N][N],char c,FILE* fin, FILE* fout);
void input_vector(double b[N],char c,FILE* fin,FILE* fout);
void simple_gauss(double a[N][N],double b[N]);
int main(void){
    FILE *fin, *fout;
    double a[N][N], b[N];
    int i;
    if((fin=fopen("input.dat","r"))==NULL) exit(1);
    if((fout=fopen("output.dat","w"))==NULL) exit(1);
    input_matrix(a,'A',fin,fout); input_vector(b,'b',fin,fout);
    simple_gauss(a,b);
    fprintf(fout,"Ax=b の解は次の通りです\n");
    for(i=0;i<N;i++){ fprintf(fout,"%f\n",b[i]);}
    fclose(fin); fclose(fout);
    return 0;
}
void simple_gauss(double a[N][N],double b[N]){
    int i,j,k;
    double alpha, tmp;
    for(k=0;k<N-1;k++){ /* 前進消去 */
        for(i=k+1;i<N;i++){
            alpha=-a[i][k]/a[k][k];
            for(j=k+1;j<N;j++){
                a[i][j]=a[i][j]+alpha*a[k][j];
            }
            b[i]=b[i]+alpha*b[k];
        }
    }
    b[N-1]=b[N-1]/a[N-1][N-1]; /* 後退代入 */
    for(k=N-2;k>=0;k--){
        tmp=b[k];
        for(j=k+1;j<N;j++){
            tmp=tmp-a[k][j]*b[j];
        }
        b[k]=tmp/a[k][k];
    }
}
```

input.dat の内容			
1.0	2.0	1.0	1.0
4.0	5.0	-2.0	4.0
4.0	3.0	-3.0	1.0
2.0	1.0	1.0	3.0
-1.0	-7.0	-12.0	2.0
output.dat の内容			
行列 A は次の通りです			
1.00	2.00	1.00	1.00
4.00	5.00	-2.00	4.00
4.00	3.00	-3.00	1.00
2.00	1.00	1.00	3.00
ベクトル b は次の通りです			
-1.00			
-7.00			
-12.00			
2.00			
Ax=b の解は次の通りです			
-2.000000			
-1.000000			
1.000000			
2.000000			

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 2 \\ x_0 + 3x_2 & = & 2 \\ 3x_0 + x_1 & = & -3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(1) 第1列の絶対最大要素:第3行. 第1行と第3行を交換

(2) 第1列の第2行, 第3行を0にする.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3) 第2列以下で第2列の絶対最大要素:第3行. 第2行と第3行を交換

(4) 第2列の第3行を0にする.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

n元連立1次方程式、すでに消去作業をk-1回行っていると仮定

- 1) k回目の消去作業において $|a_{ik}| (i=k, k+1, \dots, n-1)$ のうちで最大のものを調べて、その行番号をipとする.
- 2) $ip \neq k$ ならば、k行目とip行目を入れ換えて消去作業を行う.

アルゴリズム

続き

```
for k = 0, 1, ..., n - 2
  a_max ← |akk|; ip ← k
  for i = k + 1, k + 2, ..., n - 1
    if |aik| > a_max then
      a_max ← |aik|; ip ← i
    end if
  end if
end for
```

```
a_max < ε then
  "A is not regular", exit
end if
if ip ≠ k then
  for j = k, k + 1, ..., n - 1
    akj ↔ aip,j
  end for
  bk ↔ bip
end if
end if
```

プログラム 2.3 改

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 4
void input_matrix(double a[N][N], char c, FILE* fin, FILE* fout);
void input_vector(double b[N], char c, FILE* fin, FILE* fout);
```

```

int main(void)
{
    FILE *fin,*fout;
    double a[N][N],b[N];
    if((fin=fopen("input.dat","r"))==NULL){
        printf("ファイルは見つかりません:input.dat ¥n");
        exit(1);
    }
    if((fout=fopen("output.dat","w"))==NULL){
        printf("ファイルは見つかりません:output.dat ¥n");
        exit(1);
    }
    input_matrix(a,'A',fin,fout); /* 行列 A の入出力 */
    input_vector(b,'b',fin,fout); /* ベクトル b の入出力 */
    fclose(fin); fclose(fout);
}

void input_matrix(double a[N][N],char c,FILE* fin,FILE* fout){
    int i,j;
    fprintf(fout,"行列%c は次の通りです¥n",c);
    for(i=0;i<N;++i){
        for(j=0;j<N;++j){
            fscanf(fin,"%lf",&(a[i][j]));
            fprintf(fout,"%5.2f¥t",a[i][j]);
        }
        fprintf(fout,"¥n");
    }
}

void input_vector(double b[N],char c,FILE* fin,FILE* fout){
    int i,j;
    fprintf(fout,"ベクトル%c は次の通りです¥n",c);
    for(i=0;i<N;++i){
        fscanf(fin,"%lf",&(b[i]));
        fprintf(fout,"%5.2f¥t",b[i]);
        fprintf(fout,"¥n");
    }
}

```

input.dat の内容

```

1.0  2.0  1.0  1.0
4.0  5.0 -2.0  4.0
4.0  3.0 -3.0  1.0
2.0  1.0  1.0  3.0
-1.0 -7.0 -12.0 2.0

```

output.dat の内容

```

行列 A は次の通りです.
1.0  2.0  1.0  1.0
4.0  5.0 -2.0  4.0
4.0  3.0 -3.0  1.0
2.0  1.0  1.0  3.0
ベクトル b は次の通りです.
-1.0
-7.0
-12.0
2.0

```