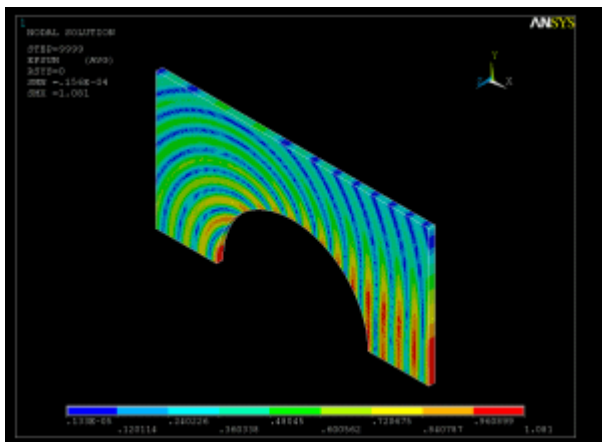
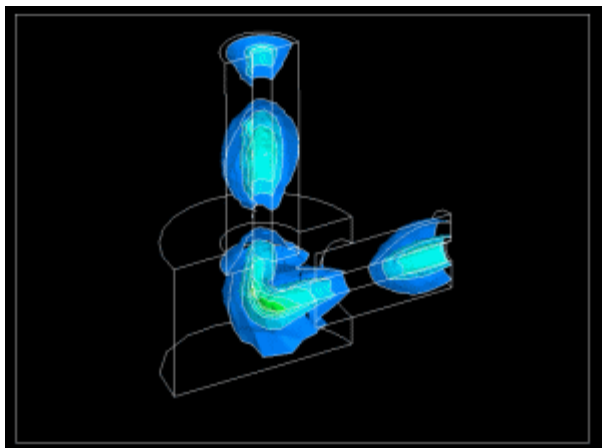


数值解析

2022年度前期 第4週 [5月12日]



静岡大学
創造科学技術大学院
情報科学専攻
工学部機械工学科
計測情報講座

三浦 憲二郎



講義アウトライン [5月12日]

- 非線形方程式
 - 2分法



非線形方程式 p.70

•代数方程式の解 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

•4次方程式までは公式があり, 解ける.

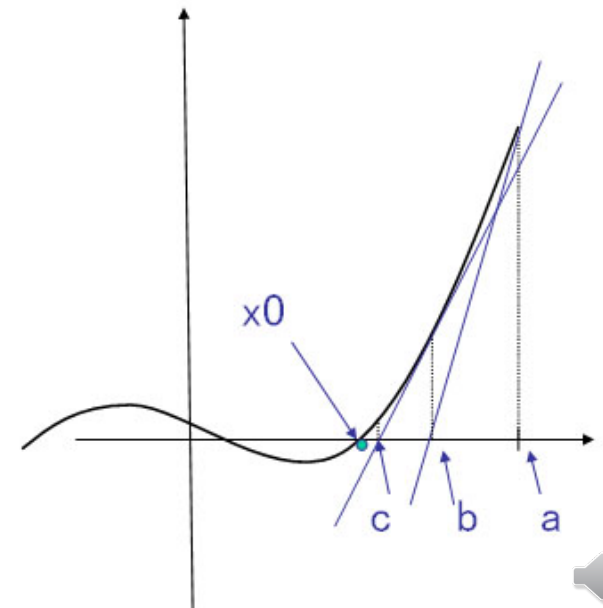
•5次以上の方程式に代数的解法は存在しない.

•数値的に解くしかない.

•高次の連立方程式, 三角関数など変数のn乗で表せない項を含む方程式

$$f(x) = x - \cos x = 0$$

•数値的に解くしかない.



2分法 p.70

- 定理4.1 (中間値の定理) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 k に対して $f(c)=k$ となる c ($a < c < b$) が存在する.

2分法

- 中間値の定理より, $f(a) f(b) < 0$ ならば, $f(c) = 0$, $a < c < b$ となる c が存在する.
- (1) 何らかの方法で $f(a) f(b) < 0$ となる閉区間 $[a, b]$ を求める.
- (2) $c_1 = (a+b)/2$
 - (2a) $f(a) f(c_1) < 0$ のとき, 解 α は $[a, c_1]$ に存在する.
 - (2b) $f(c_1) f(b) < 0$ のとき, 解 α は $[c_1, b]$ に存在する.

(2a) では $[a, b]$ の代わりに $[a, c_1]$, (2b) では $[c_1, b]$ とする.
- ステップ(2)に戻り, 閉区間が十分に小さくなるまで繰り返す



2分法のアルゴリズム p.71

Input a, b, ϵ

Do

$$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$$

if $f(a)f(c) < 0$ then

$$b \leftarrow c$$

else

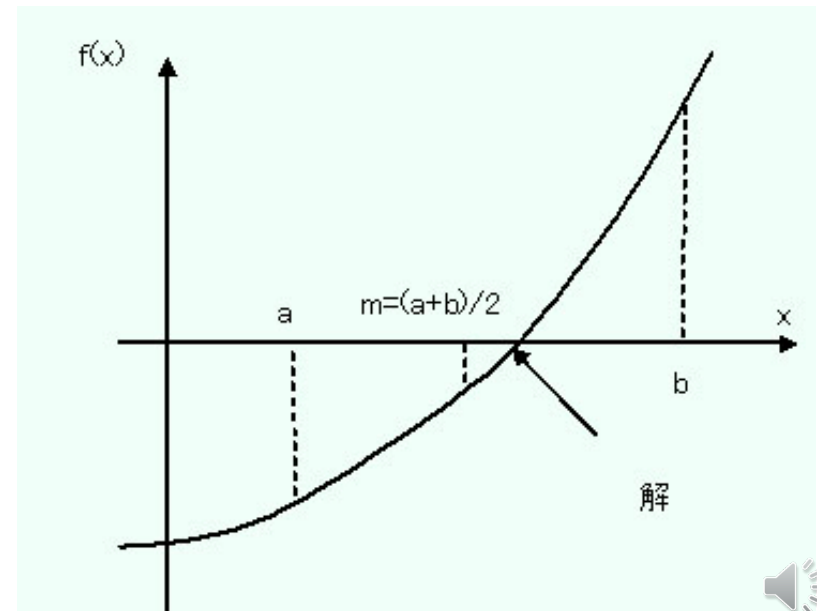
$$a \leftarrow c$$

end if

while($|a - b| \geq \epsilon$)

$$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$$

Output c



2分法

区間 $[a, b]$ に解が1つしか存在しないのならば,

• n 回目の区間 $d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{d_0}{2^n}$

• $d_n < \epsilon$ のときに計算を打ち切るとすると, 必要な計算回数 n は,

$$d_n = \frac{d_0}{2^n} < \epsilon$$
$$n > \frac{\log(\frac{d_0}{\epsilon})}{\log 2}$$

を満たす最小の自然数

絶対値誤差 $|c_n - \alpha| < \frac{d_n}{2}$

ステップ1) 区間 $[a, b]$ の求め方

- (1) 最初の区間 $[x_{\min}, x_{\max}]$, および 微小区間の幅 h を与える.
- (2) $n = (x_{\max} - x_{\min}) / h$ として分割数を定め, $x_0 = x_{\min}$ とする.
- (3) $k = 1, 2, \dots, n$ に対して, $x_k = x_{\min} + kh$ とし, $f(x_{k-1}) f(x_k) < 0$ なら $[x_{k-1}, x_k]$ を対象区間にする.



2分法: プログラム

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double bisection(double a, double b, double eps); /* 2分法 */
double f(double x); /* 関数の定義 */
int main(void) {
    double a, b, x, h, y1, y2, eps=pow(2.0, -30.0);
    int n;

    printf("初期区間[a,b]を入力してください。 ---> a b\n");
    scanf("%lf%lf", &a, &b);
    printf("区間の分割数nを入力してください。 ---> n\n");
    scanf("%d", &n);

    /* 対象区間を探索しながら2分法を適用 */
    h=(b-a)/n; y1=f(a);
    for(x=a+h; x<=b; x+=h) {
        y2=f(x);
        if(y1*y2<0.0) {
            printf("求める答えはx=%fです.\n", bisection(x-h, x, eps));
        }
        y1=y2;
    }
    return 0;
}
```



2分法: プログラム

```
/* 2分法 */
double bisection(double a, double b, double eps) {
    double c;

    do{
        c=0.5*(a+b);
        if(f(a)*f(c)<0){
            b=c;
        }
        else{
            a=c;
        }
    }while(fabs(b-a) >=eps); /* fabs() は絶対値を返す。「C言語入門」p.264 */
    c=0.5*(a+b);
    return c;
}

/* 関数の定義 */
double f(double x){
    return x*(x*x*(x*x-5.0)+4.0); /* x*x*x*x*x-5.0*x*x*x+4.0*x */
}
```



プログラム:実行結果

初期区間[a,b]を入力してください。 --> a b

-3 3

区間の分割数nを入力してください。 --> n

10

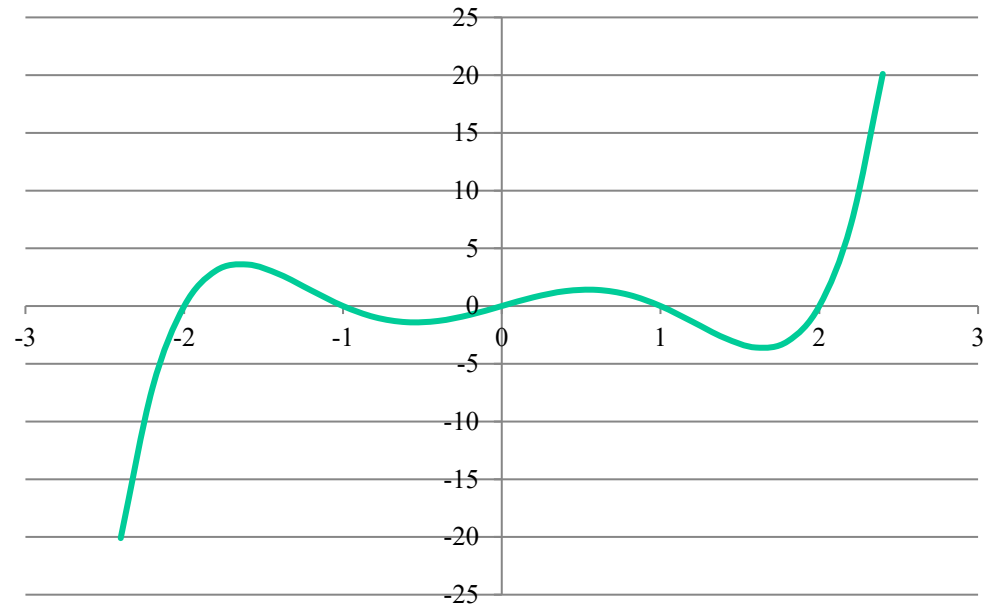
求める答えはx=-2.000000です.

求める答えはx=-1.000000です.

求める答えはx=-0.000000です.

求める答えはx=1.000000です.

求める答えはx=2.000000です.



まとめ

- 非線形方程式

- 2分法

