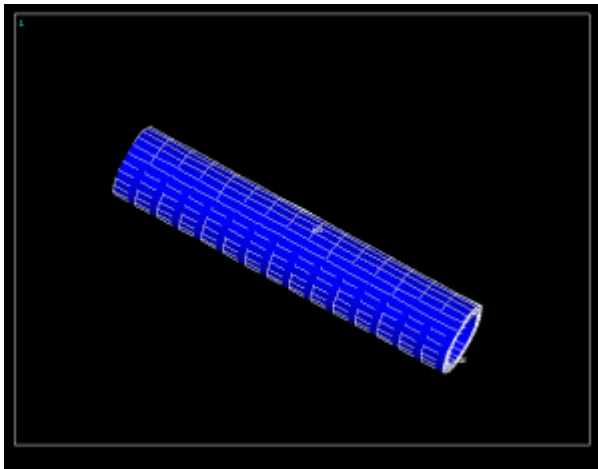
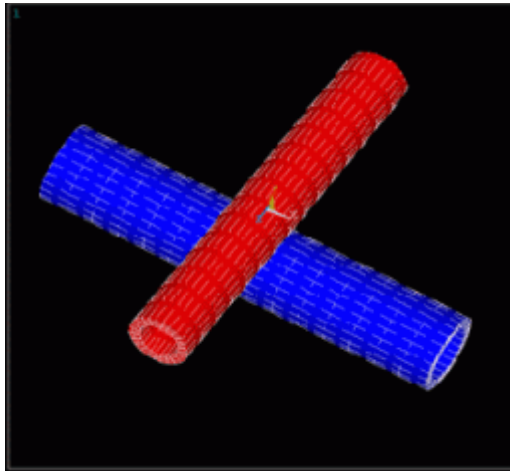


数值解析

2023年度前期 第7週 [6月1日]



静岡大学

工学研究科機械工学専攻

ロボット・計測情報分野

創造科学技術大学院

情報科学専攻

三浦 憲二郎

講義アウトライン [6月1日]

- 連立1次方程式の直接解法
 - ガウス消去法(復習)
 - 部分ピボット選択付きガウス消去法

連立1次方程式

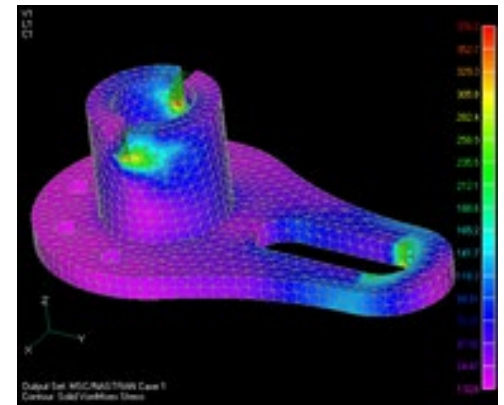
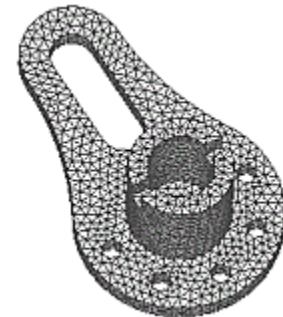
$$Ax = b$$

•連立1次方程式の重要性

•非線形の問題は基本的には解けない.

•非線形問題を線形化して解く.

- 複雑な構造物, 単純な要素に分解
- 各要素に対して線形方程式を立てる.
- 重ね合わせの原理により統合
- ただし, 変数の数は膨大
- コンピュータにより数値的に解く.



ガウス消去法

連立1次方程式の解法

$$x-y=1 \quad (1)$$

$$x+2y=4 \quad (2)$$

1. 代入法

式(1)より $y=x-1$, 式(2)に代入

$x+2(x-1)=4$, したがって $3x=6$, よって $x=2$, 式(1)より $y=1$

2. 加減法

式(2)より式(1)を引く: $3y=3$, したがって $y=1$, 式(1)より $x=2$

ガウス消去法は, 加減法をコンピュータに適した方法で行う.

ガウス消去法:3元

$$3x_0 + x_1 + 2x_2 = 13$$

$$5x_0 + x_1 + 3x_2 = 20$$

$$4x_0 + 2x_1 + x_2 = 13$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 13 \end{bmatrix}$$

(1) 第1列の2行目と3行目を0にする.

「第1行 $\times (-5/3)$ + 第2行目」

「第1行 $\times (-4/3)$ + 第3行目」

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

(2) 第2列の3行目を0にする.

「第2行 $\times 1$ + 第3行」

(1), (2): 前進消去

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{5}{3} \\ -6 \end{bmatrix}$$

(3) x_3 , x_2 , x_1 の順に代入して答えを求める.

(3): 後退代入

ガウス消去法:n元

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

(前進消去)

If $a_{00} \neq 0$

$$\alpha_{i0} = -\frac{a_{i0}}{a_{00}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ 0 & a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + \alpha_{i0}a_{0j}, \quad b_i^{(1)} = b_i + \alpha_{i0}b_0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

ガウス消去法:n元

(後退代入)

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2}^{(n-2)} - a_{n-2,n}^{(n-2)} x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}^{(n-2)}}$$

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{kj}^{(k-1)} x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

ガウス消去法: アルゴリズム

行列Aとベクトルbの入力

/* 前進消去 */

for $k = 0, 1, \dots, n - 2$

for $i = k + 1, k + 2, \dots, n - 1$

$$\alpha \leftarrow -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

for $j = k + 1, k + 2, \dots, n - 1$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + \alpha a_{kj}$$

end for

$$b_i = b_i + \alpha b_k$$

end for

end for

/* 後退代入 */

for $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$

$$b_k \leftarrow \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{kj} b_j}{a_{kk}}$$

end for

bを出力 /* 答えはbに上書き*/

ガウス消去法:プログラム

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 4 /* N次正方行列 */
void input_matrix(double a[N][N],char c,FILE* fin, FILE* fout);
void input_vector(double b[N],char c,FILE* fin,FILE* fout);
void simple_gauss(double a[N][N],double b[N]);
int main(void) {
    FILE *fin, *fout;
    double a[N][N], b[N];
    int i;
    if((fin=fopen("input.dat","r"))==NULL) exit(1);
    if((fout=fopen("output.dat","w"))==NULL) exit(1);
    input_matrix(a,'A',fin,fout); input_vector(b,'b',fin,fout);
    simple_gauss(a,b);
    fprintf(fout,"Ax=bの解は次の通りです\n");
    for(i=0;i<N;i++){ fprintf(fout,"%f\n",b[i]);}
    fclose(fin); fclose(fout);
    return 0;
}
```

ガウス消去法:プログラム

```
void simple_gauss(double a[N][N],double b[N]){
    int i,j,k;
    double alpha, tmp;
    for(k=0;k<N-1;k++){ /* 前進消去 */
        for(i=k+1;i<N;i++){
            alpha=-a[i][k]/a[k][k];
            for(j=k+1;j<N;j++){
                a[i][j]=a[i][j]+alpha*a[k][j];
            }
            b[i]=b[i]+alpha*b[k];
        }
    }
    b[N-1]=b[N-1]/a[N-1][N-1]; /* 後退代入 */
    for(k=N-2;k>=0;k--){
        tmp=b[k];
        for(j=k+1;j<N;j++){
            tmp=tmp-a[k][j]*b[j];
        }
        b[k]=tmp/a[k][k];
    }
}
```

部分ピボット選択付きガウス消去法

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 2 \\ x_0 + 3x_2 & = & 2 \\ 3x_0 + x_1 & = & -3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(1) 第1列の絶対最大要素:第3行. 第1行と第3行を交換

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) 第1列の第2行, 第3行を0にする.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

部分ピボット選択付きガウス消去法

(3) 第2列以下で第2列の絶対最大要素:第3行. 第2行と第3行を交換

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(4) 第2列の第3行を0にする.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

部分ピボット選択付きガウス消去法

n 元連立1次方程式、すでに消去作業を $k-1$ 回行っていると仮定

- 1) k 回目の消去作業において $|a_{ik}|$ ($i=k, k+1, \dots, n-1$)のうちで最大のものを調べて、その行番号を ip とする。
- 2) $ip \neq k$ ならば、 k 行目と ip 行目を入れ換えて消去作業を行う。

アルゴリズム

```
for  $k = 0, 1, \dots, n - 2$ 
   $a_{max} \leftarrow |a_{kk}|$ ;  $ip \leftarrow k$ 
  for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n - 1$ 
    if  $|a_{ik}| > a_{max}$  then
       $a_{max} \leftarrow |a_{ik}|$ ;  $ip \leftarrow i$ 
    end if
  end if
```

部分ピボット選択付きガウス消去法

アルゴリズム(続き)

```
amax < ε then
    "A is not regular", exit
end if
if  $ip \neq k$  then
    for  $j = k, k + 1, \dots, n - 1$ 
         $a_{kj} \leftrightarrow a_{ip,j}$ 
    end for
     $b_k \leftrightarrow b_{ip}$ 
end if
end if
```

ピボット付きガウス消去法:プログラム

```
void gauss(double a[N][N],double b[N]){
    int i,j,k,ip;
    double alpha, tmp;
    double amax, eps=pow(2.0,-50.0); /* eps=2^{-50}とする */
    for(k=0;k<N-1;k++){
        amax=fabs(a[k][k]); ip=k; /* ピボットの選択 */
        for(i=k+1;i<N;i++){
            if(fabs(a[i][k])>amax){ /* fabs( ) は絶対値を返す. 「C言語入門」 p.264
                amax=fabs(a[i][k]); ip=i;
            }
        }
        if(amax<eps) { /* 正則性の判定 */
            printf("入力した行列は正則ではない!!\n"); exit(1);
        }
        if(ip!=k){
            for(j=k;j<N;j++){
                tmp=a[k][j]; a[k][j]=a[ip][j]; a[ip][j]=tmp;
            }
            tmp=b[k]; b[k]=b[ip]; b[ip]=tmp;
        }
        for(i=k+1;i<N;i++){ /* 前進消去 */
            alpha=-a[i][k]/a[k][k];
            for(j=k+1;j<N;j++){
                a[i][j]=a[i][j]+alpha*a[k][j];
            }
            b[i]=b[i]+alpha*b[k];
        }
    }
    b[N-1]=b[N-1]/a[N-1][N-1]; /* 後退代入 */
    for(k=N-2;k>=0;k--){
        tmp=b[k];
        for(j=k+1;j<N;j++){
            tmp=tmp-a[k][j]*b[j];
        }
        b[k]=tmp/a[k][k];
    }
}
```

データ入出力 p.19「C言語入門」p.282)

プログラム2.3改

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 4
void input_matrix(double a[N][N],char c,FILE* fin,FILE* fout);
void input_vector(double b[N],char c,FILE* fin,FILE* fout);
int main(void)
{
    FILE *fin,*fout;
    double a[N][N],b[N];
    if((fin=fopen("input.dat","r"))==NULL){
        printf("ファイルは見つかりません:input.dat %n");
        exit(1);
    }
    if((fout=fopen("output.dat","w"))==NULL){
        printf("ファイルが作成できません:output.dat %n");
        exit(1);
    }
}
```


データ入出力 p.19「C言語入門」p.282)

プログラム2.3改 続き

```
    input_matrix(a, 'A', fin, fout); /* 行列Aの入出力 */
    input_vector(b, 'b', fin, fout); /* ベクトルbの入出力 */

    fclose(fin); fclose(fout);
}

void input_matrix(double a[N][N], char c, FILE* fin, FILE* fout) {
    int i, j;
    fprintf(fout, "行列%cは次の通りです\n", c);
    for (i=0; i<N; ++i) {
        for (j=0; j<N; ++j) {
            fscanf(fin, "%lf", &(a[i][j]));
            fprintf(fout, "%5.2f\t", a[i][j]);
        }
        fprintf(fout, "\n");
    }
}
```

データ入出力 p.19「C言語入門」p.282)

プログラム2.3改 続き

```
void input_vector(double b[N],char c,FILE* fin,FILE* fout){
    int i;
    fprintf(fout,"ベクトル%cは次の通りです\n",c);
    for(i=0;i<N;++i){
        fscanf(fin,"%lf",&(b[i]));
        fprintf(fout,"%5.2f\t",b[i]);
        fprintf(fout,"\n");
    }
}
```

input.datの内容

```
1.0  2.0  1.0  1.0
4.0  5.0 -2.0  4.0
4.0  3.0 -3.0  1.0
2.0  1.0  1.0  3.0
-1.0 -7.0 -12.0 2.0
```

データ入出力 p.19「C言語入門」p.282)

プログラム2.3改 続き

output.datの内容

行列Aは次の通りです.

1.0 2.0 1.0 1.0

4.0 5.0 -2.0 4.0

4.0 3.0 -3.0 1.0

2.0 1.0 1.0 3.0

ベクトルbは次の通りです.

-1.0

-7.0

-12.0

2.0

まとめ

- 連立1次方程式の直接解法
 - ガウス消去法
 - 部分ピボット選択付きガウス消去法
- C言語の基礎
 - 2次元配列
 - データ入出力