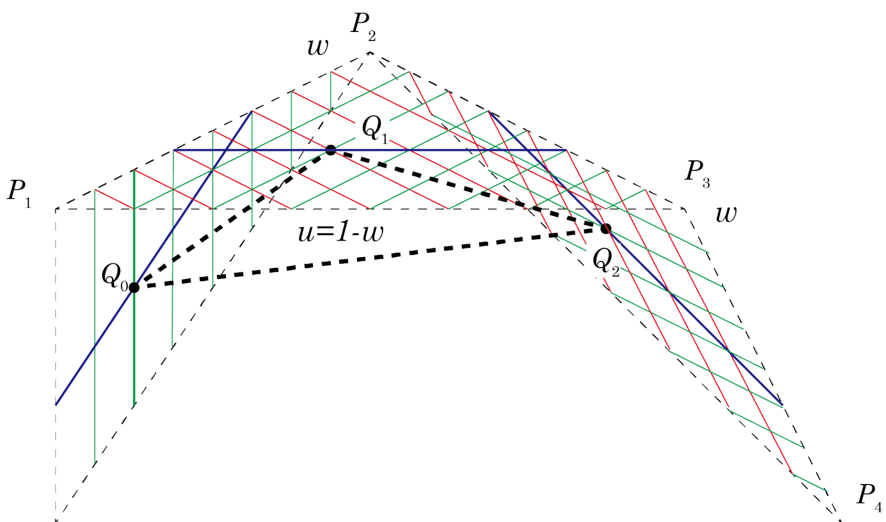
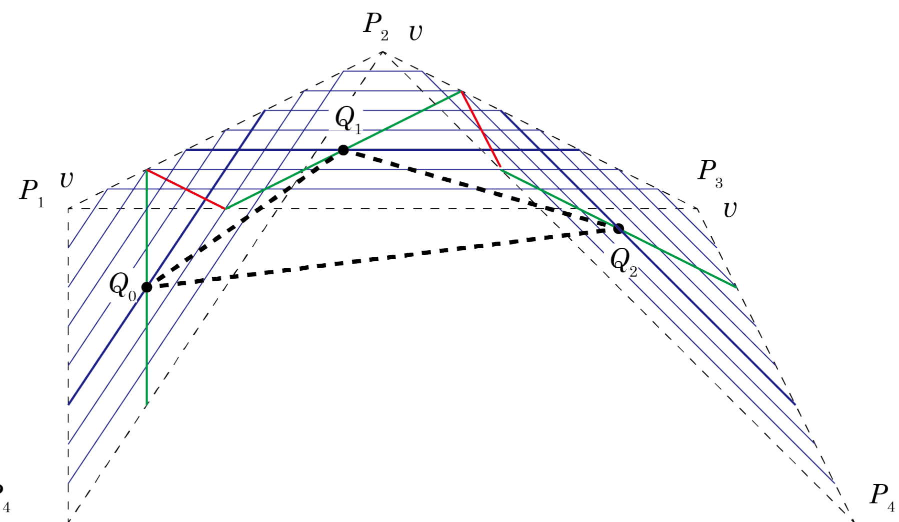
数値解析

2022年度前期　第11週 [6月29日]



w-u-w-u-w-isoparametric lines



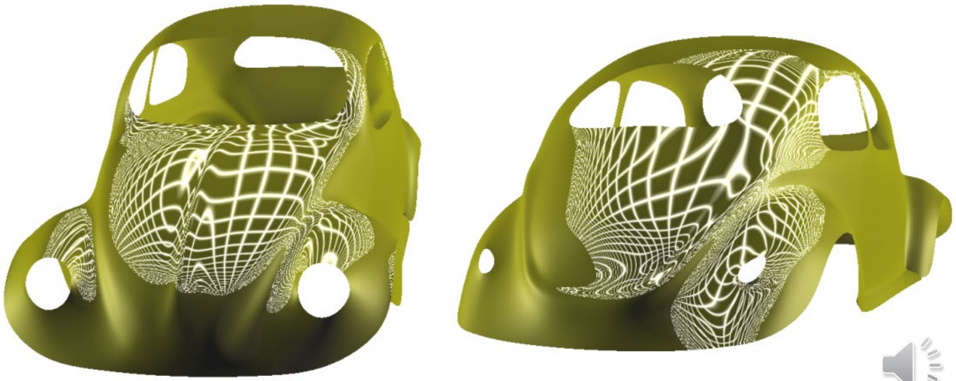
v-isoparametric lines

静岡大学
創造科学技術大学院情報科学専攻
工学部機械工学科ロボット・計測情報分野

三浦 憲二郎

講義アウトライン [6月29日]

- 関数近似と補間
  - 最小2乗近似による関数近似
  - ラグランジュ補間



T.Kanai, U.Tokyo

関数近似 p.116

•複雑な関数を簡単な関数で近似する　関数近似

•閉区間[a,b]で定義された関数f(x)をg(x)=Σ$a_i \phi_i$(x)で近似

する. 関数系 ϕ_i(x) は[a, b]上で連続かつ1次独立

関数が1次独立とは,

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_{n-1}\phi_{n-1}(x) = 0 \to c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$$

関数の差のノルムの二乗

$$\begin{aligned} ||f-g||_2^2 &:= \int_a^b \{f(x) - g(x)\}^2 dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\phi_i(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

が最小になるように係数 a_i を定める.

関数近似　確認問題

1. 2点(1,-1), (3,7)を通る直線を求めよ。

ヒント

y=ax+b

2. 次の関数の最小値を求めよ.

$$f(x, y) = x^2 + x(y+1) + y^2$$

3.最小2 乗法を用いて，3 点(1,-1), (2, 1), (3, 7) を近似する直線を求めよ.

関数近似　確認問題 解答

1.　2点(1,-1), (3,7)を通る直線を求めよ。

(y+1)=a(x-1),　7+1=a(3-1), a=4, b=-5

2.次の関数の最小値を求めよ.

$$\frac{df}{dx} = 2x + y + 1 = 0,\ \frac{df}{dy} = x + 2y = 0$$

$$x = \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3},$$

3.最小2 乗法を用いて，3 点(1,-1), (2, 1), (3, 7) を近似する直線を求めよ.

$$y = 4a - \frac{17}{3}$$

定理6.1　p.117

- 関数系　ϕ_i が1次独立であれば，(6.1)のノルム$\|\cdot\|_2^2$を最小にする係数は連立1次方程式

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_{n-1},\varphi_0) & \cdots & (\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ \vdots \\ (f,\varphi_{n-1}) \end{bmatrix}$$

の解として一意に決定される．ここで，[a, b] 上の連続関数f(x)とg(x)に対して

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

定理6.1　p.117

•(証明)（(6.1)より

$$
\begin{aligned}
F(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) &:= ||f-g||_2^2 = (f-g, f-g) = (f,f) - 2(f,g) + (g,g) \\
&= ||f||_2^2 - 2(f, \sum_{i=0}^{n-1} a_i\phi_i) + (\sum_{i=0}^{n-1} a_i\phi_i, \sum_{j=0}^{n-1} a_j\phi_j) \\
&= ||f||_2^2 - 2(f, \sum_{i=0}^{n-1} a_i\phi_i) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j(\phi_i, \phi_j)
\end{aligned}
$$

が最小になるには極値の必要条件を満たさなければならない.

$$
\frac{\partial F}{\partial a_i} = -2(f, \phi_i) + 2\sum_{j=0}^{n-1} a_j(\phi_i, \phi_j) = 0
$$

連立１次方程式(6.2)を解くことと同値.

グラム行列式　p.117

•要素 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ が線形独立であることと，以下のグラム行列式が0でないことと同値．(6.2)はただ1つの解を持つ．

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} (x_0, x_0) & (x_0, \phi_1) & \cdots & (x_0, x_{n-1}) \\ (x_1, x_0) & (x_0, \phi_1) & \cdots & (x_0, x_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n-1}, x_0) & (x_{n-1}, x_1) & \cdots & (x_{n-1}, x_{n-1}) \end{vmatrix} \neq 0$$

定理6.2　$\phi_i = x^i$ $(i=0,1,2,\cdots)$は $[a,b]$ で連続であり，かつ1次独立である．

（証明）　任意の自然数　n　に対して，

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

と仮定すると，閉区間[a, b]の任意の t に対して0, したがって

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

なぜならば, n次方程式の解は高々n個．

関数近似の例　p.118

- 例6.3　$f(x)=x^2$ に対する最小2乗近似1次式 $g(x)=a_0 + a_1 x$ を[0,1]で求めよ.

- $\phi_0(x)=1$, $\phi_1(x)=x$ とすると

$$
\begin{aligned}
(\phi_0, \phi_0) &= \int_0^1 1dx = 1, \quad (\phi_0, \phi_1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} = (\phi_1, \phi_0) \\
(\phi_1, \phi_1) &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\
(f, \phi_0) &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad (f, \phi_1) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

したがって，$a_0 = -1/6$, $a_1 = 1$.　よって　$y=x-1/6$.

定理6.4　p.119

•m組の与えられたデータ(x_0,y_0), (x_1,y_1), ⋯ ,(x_{m-1},y_{m-1})を通る関数f(x)を

$g(x)=\Sigma a_i\ \phi_i(x)$によって近似することを考える.

$$F(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) \quad := \quad ||f-g||_2^2 = \sum_{k=0}^{m-1}(y_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_j\phi_j(x_k))^2$$

が最小になるようにa_0, a_1,⋯,a_{n-1}を決定する.

連立1次方程式

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & \cdots & (\phi_0,\phi_{n-1}) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & \cdots & (\phi_1,\phi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_{n-1},\phi_0) & (\phi_{n-1},\phi_1) & \cdots & (\phi_{n-1},\phi_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{y},\phi_0) \\ (\boldsymbol{y},\phi_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{y},\phi_{n-1}) \end{bmatrix}$$

の解である.

$$(\boldsymbol{y},\phi_i) \quad = \quad \sum_{k=0}^{m-1} y_k\phi_i(x_k)$$

$$(\phi_i,\phi_j) \quad = \quad \sum_{k=0}^{m-1} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k)\ (k=0,1,\cdots,m-1; i,j=0,1,\cdots,n-1)$$

最小2乗近似：プログラム：p.120

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define  M  6    /* データのペア数 */
#define  N  3    /* N次式で近似 */

/* ベクトルの入力 */
void input_vector2( double *b, char c, int n, FILE *fin, FILE *fout);
/* 部分ピボット選択付きガウス消去法 */
void gauss2( double a[N+1][N+1], double b[N+1], int n );
/* 最小2乗近似 */
void least_square( double *x, double *y, FILE *fout );

int main(void)
{
  FILE *fin, *fout;
  double x[M], y[M];
  /* ファイルのオープン */
  if ( (fin = fopen( "input_func.dat", "r")) == NULL )
  {
     printf("ファイルが見つかりません : input_func.dat ¥n");
     exit(1);
  }
  if( (fout = fopen( "output_func.dat", "w")) == NULL )
  {
    printf("ファイルが作成できません : output_func.dat ¥n");
    exit(1);
   }
  input_vector2( x, 'x', M, fin, fout );    /* ベクトルxの入出力 */
  input_vector2( y, 'y', M, fin, fout );    /* ベクトルyの入出力 */

  least_square( x, y, fout );  /* 最小2乗近似 */

  fclose(fin); fclose(fout);  /* ファイルのクローズ */

  return 0;
}
```

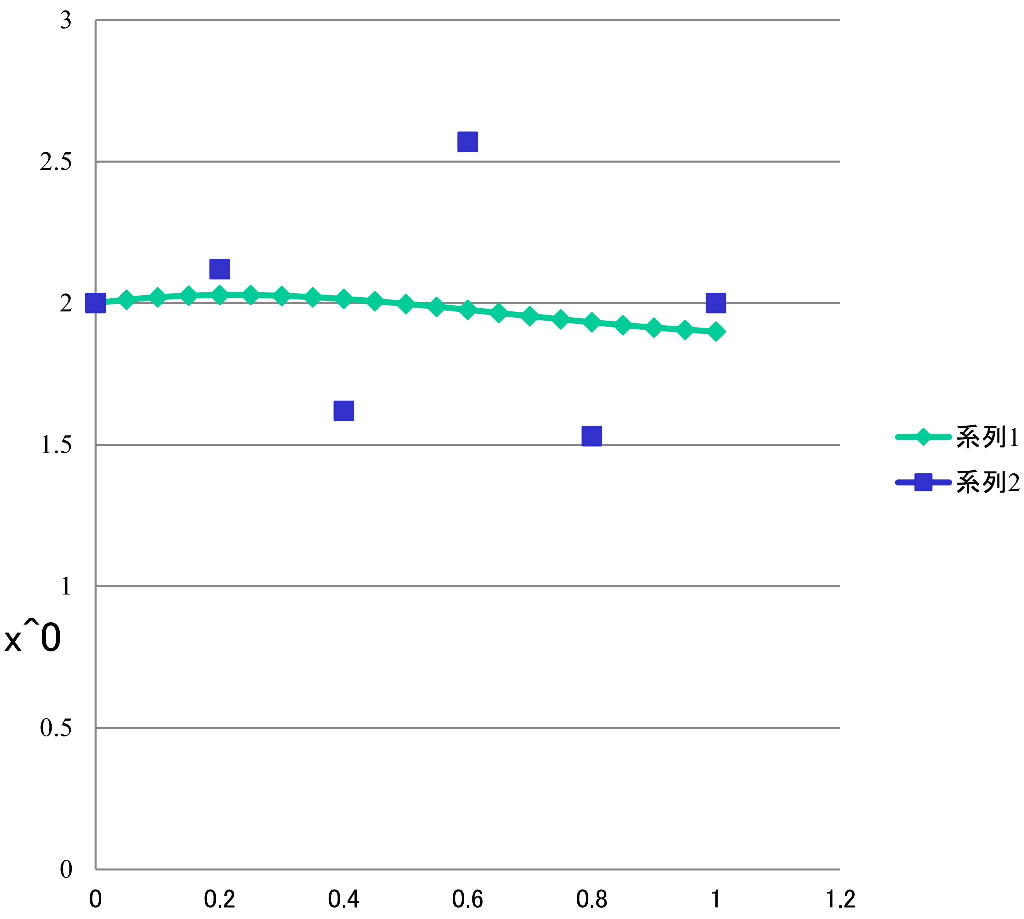
```
void least_square( double x[M], double y[M], FILE *fout )
{
  double a[N+1], p[N+1][N+1];
  int i, j, k;
  /* 右辺ベクトルの作成 */
  for(i=0; i <= N; i++)  {
    a[i]=0.0;
    for( j = 0; j < M; j++)  {
      a[i] +=  y[j]*pow(x[j],(double)i) ;
    }
  }
  /* 係数行列の作成 */
  for( i = 0; i <= N; i++)  {
    for( j = 0; j <= i;  j++ )  {
      p[i][j]=0.0;
      for( k =0; k < M; k++)  {
        p[i][j] += pow( x[k], (double)(i+j) );
      }
      p[j][i] = p[i][j];
    }
}
  /* 連立1次方程式を解く. 結果はaに上書き */
   gauss2( p, a, N+1 );
  /* 結果の出力 */
  fprintf( fout, "最小2乗近似式は y =");
  for( i = N ; i >= 0 ; i--) {
              if(a[i]>0){
                          if(i==N){
                            fprintf(fout, " %5.2f x^%d ", a[i],i);
                          }
                          else{
                                  fprintf(fout, "+ %5.2f x^%d ", a[i],i);
                          }
              }
              else{
                        fprintf(fout, "- %5.2f x^%d ", fabs(a[i]),i);
              }
  }
  fprintf(fout, "¥n");
}
```

最小2乗近似:実行結果 p.123

input_func.dat
0.0　0.2　0.4　0.6　0.8　1.0

2.0　2.12　1.62　2.57　1.53　2.0

output_func.dat
ベクトルxは次の通りです
 0.00 0.20 0.40 0.60 0.80 1.00
ベクトルyは次の通りです
 2.00 2.12 1.62 2.57 1.53 2.00
最小2乗近似式は
y = 0.38 x^3 − 0.76 x^2 + 0.28 x^1 + 2.00 x^0



ラグランジュ補間 p.124

- 点(x_0,f_0), (x_1,f_1), ⋯ , (x_n,f_n) が与えられたとき，これらすべての点(x_i,f_i) を通る曲線 $y=f(x)$ を求めて $x_0 < x < x_n$ の与えられた点以外の関数値を求めることを補間，内挿 (interpolation)するという.

$f_k = f(x_k)$, $k=0,1,\cdots,n$ が与えられたとき，等式 $P(x_k) = f_k$, $k=0,1,\cdots,n$ を満たす多項式 $P(x)$ を $f(x)$ の補間多項式という.

定理6.5 補間条件を満たすn次多項式 $P_n(x)$ はただ1つに定まる.

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\
V &= \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots & x_0^n & \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^n & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vの行列式：バンデルモンド(Vandermonde)の行列， 解が1つに定まる.

ラグランジュ補間 p.125

•n次のラグランジュ補間多項式，ラグランジュ補間(Lagrange interpolation)

$$l_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

基本多項式 $l_i(x)$ の 点x_k（$0 \leqq k \leqq n$）での値は

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} := \begin{cases} 1 & (k = i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases}$$

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \delta_{ik} = f_k$$

関数近似　確認問題 解答

3.ラグランジュ補間を用いて(1,-1), (2,-1), (3, 7)
　を通る2 次曲線を求めよ.

関数近似　確認問題 解答

3.ラグランジュ補間を用いて，を用いて(1,-1), (2,1), (3, 7)
を通る2 次曲線を求めよ.

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, l_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$l_0 = \frac{(x-2)(x-3)}{2}, l_1 = -(x-1)(x-3), l_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$y = 2x^2 - 4x + 1$$

ラグランジュ補間：プログラム p.125

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 9
/* ベクトルの入力 */
void input_vector3( double b[N+1], char c, FILE *fin );
/* ラグランジュ補間 */
double lagrange( double x[N+1], double y[N+1], double xi );

int main(void) {
  FILE *fin, *fout;
  double x[N+1], y[N+1], xi;   /* xiは補間点 */

  printf("補間点を入力してください--->");
  scanf("%lf", &xi);

  /* ファイルのオープン */
  if ( (fin = fopen( "input_lag.dat", "r")) == NULL ) {
      printf("ファイルが見つかりません : input_lag.dat ¥n");
      exit(1);
  }
  if( (fout = fopen( "output_lag.dat", "w")) == NULL ) {
    printf("ファイルが作成できません : output_lag.dat ¥n");
    exit(1);
   }

  input_vector3( x, 'x', fin );   /* ベクトルxの入出力 */
  input_vector3( y, 'y', fin );   /* ベクトルyの入出力 */

  printf("補間の結果は、P(%f)=%f¥n", xi, lagrange(x,y,xi) );

  /* グラフを描くために結果をファイルに出力 */
  for( xi = x[0]; xi <= x[N]; xi += 0.01 ) {
    fprintf(fout, "%f ¥t %f¥n", xi, lagrange(x,y,xi) );
  }
  fclose(fin); fclose(fout);  /* ファイルのクローズ */

  return 0;
}
```

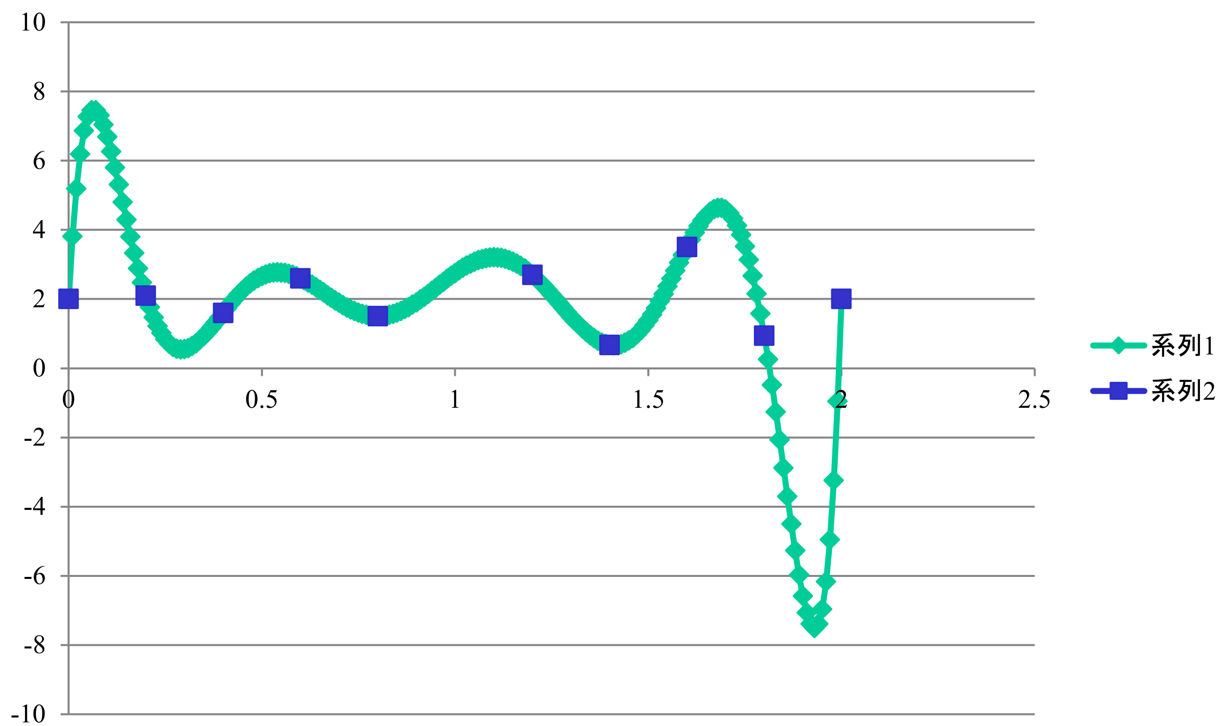
```
/* ラグランジュ補間 */
double lagrange( double x[N+1], double y[N+1], double xi )
{
  int i, k;
  double pn = 0.0, li;

  /* P_n(x)の計算 */
  for ( i = 0; i <= N ; i++ ) {
    li = 1.0;
    /* l_i(x)の計算 */
    for( k = 0; k <= N; k++ ) {
      if( k != i ) li *= (xi -x[k]) / (x[i]-x[k]);
    }
    pn += li * y[i];
  }
  return pn;
}

/* b[0...N]の入力 */
void input_vector3( double b[N+1], char c, FILE *fin )
{
  int i;
  for( i = 0 ; i <= N ; i++) {
    fscanf(fin, "%lf", &b[i]);
  }
}
```

ラグランジュ補間：実行結果

input_lag.dat

0.0　0.2　0.4　0.6　0.8　1.2　1.4　1.6　1.8　2.0

2.0　2.1　1.6　2.6　1.5　2.7　0.67　3.5　0.94　2.0



関数近似　確認問題

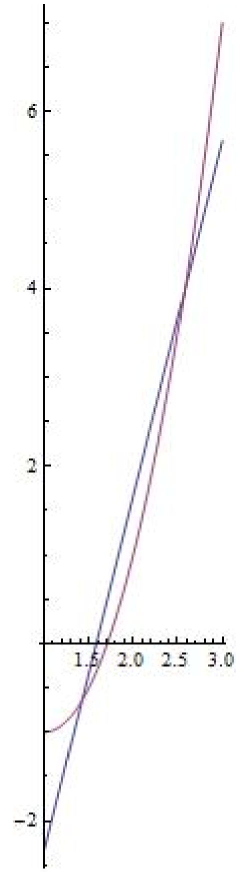
4. 2 次関数$y = 2x^2 - 4x + 1$ を$1 <= x <= 3$ の範囲で最良に近似する1 次関数$y = a_0 + a_1 x$を求めよ.

関数近似　確認問題　解答

4. 2 次関数$y = 2x^2 - 4x + 1$ を$1 <= x <= 3$ の範囲で最良に近似する1 次関数$y=a_0 + a_1 x$を求めよ.

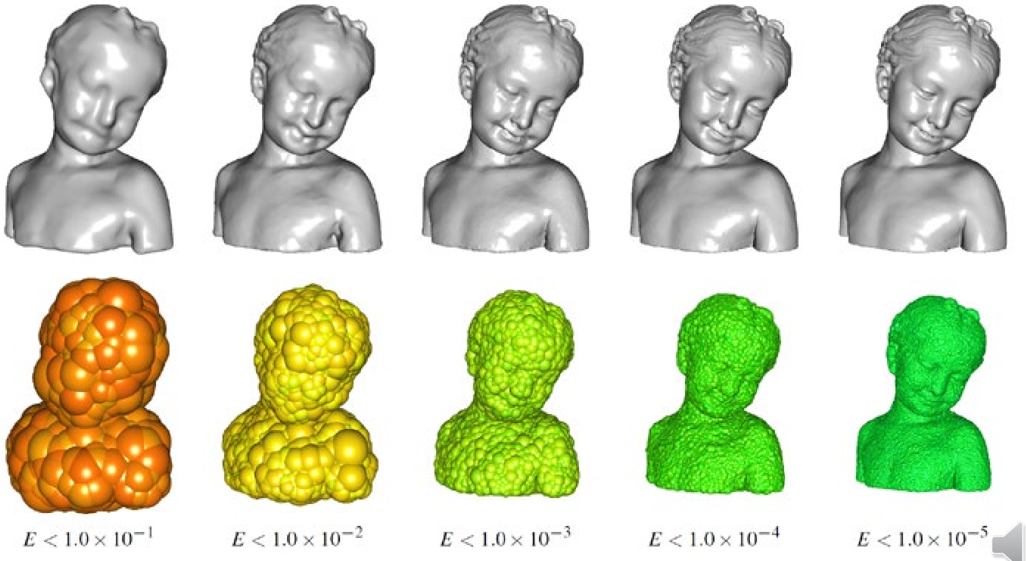
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & \frac{26}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{28}{3} \end{bmatrix}$$

$$y = 4x - \frac{19}{3}$$



まとめ

- 関数近似と補間
  - 最小2乗近似による関数近似
  - ラグランジュ補間



T.Kanai, U.Tokyo