２０２１年度前期　数値解析　第９回講義ノート

２０２１年７月８日　三浦憲二郎

スライド１　講義アウトライン

- 関数「　　」と「　　」
  - 「　　」近似による関数近似
  - 「　　」補間

スライド２　関数近似　p.116

- 複雑な関数を簡単な関数で近似する　　関数「　　」
- 閉区間[a,b]で定義された関数 f(x)を g（x）=Σ $a_i \phi_i(x)$で近似する．関数系 $\phi_i(x)$ は[a, b]上で連続かつ１次独立

  関数が１次独立とは,

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_{n-1}\phi_{n-1}(x) = 0 \rightarrow c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$$

関数の差の「　　」　$||f-g||_2^2 := \int_a^b \{f(x)-g(x)\}^2 dx$

$$= \int_a^b \{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\phi_i(x)\}^2 dx$$

が最小になるように係数　a_i　を定める．

スライド３　定理 6.1　p.117

- (証明)　(6.1)より

$$F(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) := ||f-g||_2^2 = (f-g, f-g) = (f,f) - 2(f,g) + (g,g)$$

$$= ||f||_2^2 - 2(f, \sum_{i=0}^{n-1} a_i\phi_i) + (\sum_{i=0}^{n-1} a_i\phi_i, \sum_{j=0}^{n-1} a_j\phi_j)$$

$$= ||f||_2^2 - 2(f, \sum_{i=0}^{n-1} a_i\phi_i) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j(\phi_i, \phi_j)$$

が最小になるには「　　」の「　　」条件を満たさなければならない．

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = -2(f, \phi_i) + 2\sum_{j=0}^{n-1} a_j(\phi_i, \phi_j) = 0$$

連立１次方程式「　　」を解くことと同値．

スライド４　グラム行列式

- 要素 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ が線形独立であることと，以下の「　　」行列式が 0 でないことと同値.
  （6.2）はただ「　　」の解を持つ.

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} (x_0,x_0) & (x_0,\phi_1) & \cdots & (x_0,x_{n-1}) \\ (x_1,x_0) & (x_0,\phi_1) & \cdots & (x_0,x_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n-1},x_0) & (x_{n-1},x_1) & \cdots & (x_{n-1},x_{n-1}) \end{vmatrix} \neq 0$$

定理 6.2　$\phi_i = x_i$ (i=0,1,2,…)は [a,b] で連続であり，かつ 1 次独立である.

（証明）　任意の自然数　n　に対して,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

と仮定すると，閉区間[a,　b]の任意の　t　に対して 0, したがって

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

なぜならば, n 次方程式の解は高々n 個.

スライド５　関数近似の例　　p.118

- 例 6.3　$f(x)=x^2$ に対する最小 2 乗近似 1 次式 $g(x)=a0 + a1\ x$ を[0,1]で求めよ.

$$\begin{aligned} (\phi_0,\phi_0) &= \int_0^1 1dx = 1 \quad (\phi_0,\phi_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = (\phi_0,\phi_1) \\ (\phi_1,\phi_1) &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\ (f,\phi_0) &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (f,\phi_1) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- $\phi_0(x)=1$, $\phi_1(x)=x$ とすると
  したがって，$a_0 = -1/6$, $a_1 = 1$.　よって　$y=x-1/6$.

スライド６　定理 6.4　p.119

m 組の与えられたデータ(x_0,y_0), (x_1,y_1), … ,(x_{m-1},y_{m-1})を通る関数 f(x)を $g(x)=\Sigma a_i\ \phi_i(x)$によって近似することを考える.

$$F(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) := ||f-g||_2^2 = \sum_{k=0}^{m-1}(y_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_j\phi_j(x_k))^2$$

が最小になるように a_0,　$a_1,\cdots,a_{n-1}$ を決定する.

連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & \cdots & (\phi_0,\phi_{n-1}) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & \cdots & (\phi_1,\phi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\phi_{n-1},\phi_0) & (\phi_{n-1},\phi_1) & \cdots & (\phi_{n-1},\phi_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{y},\phi_0) \\ (\boldsymbol{y},\phi_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{y},\phi_{n-1}) \end{bmatrix}$$

の解である.

$$(\boldsymbol{y},\phi_i) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k\phi_i(x_k)$$

$$(\phi_i,\phi_j) = \sum_{k=0}^{m-1} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k)\ (k=0,1,\cdots,m-1; i,j=0,1,\cdots,n-1)$$

スライド7　最小2乗近似：プログラム 6.1 改　　p.120

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define   M   6      /* データのペア数 */
#define   N   3      /* N 次式で近似 */
/* ベクトルの入力 */
void input_vector2( double *b, char c, int n, FILE *fin, FILE *fout);
/* 部分ピボット選択付きガウス消去法 */
void gauss2( double a[N+1][N+1], double b[N+1], int n );
/* 最小 2 乗近似 */
void least_square( double *x, double *y, FILE *fout );
int main(void)
{
   FILE *fin, *fout;
   double x[M], y[M];
   /* ファイルのオープン */
   if ( (fin = fopen( "input_func.dat", "r")) == NULL )
   {
        printf("ファイルが見つかりません ：input_func.dat ¥n");
        exit(1);
   }
   if( (fout = fopen( "output_func.dat", "w")) == NULL )
   {
      printf("ファイルが作成できません ：output_func.dat ¥n");
      exit(1);
    }
   input_vector2( x, 'x', M, fin, fout );      /* ベクトル x の入出力 */
   input_vector2( y, 'y', M, fin, fout );      /* ベクトル y の入出力 */
   least_square( x, y, fout );   /* 最小 2 乗近似 */
   fclose(fin); fclose(fout);   /* ファイルのクローズ */
   return 0;
}
void least_square( double x[M], double y[M], FILE *fout )
{
   double a[N+1], p[N+1][N+1];
   int i, j, k;
   /* 右辺ベクトルの作成 */
   for(i=0; i <= N; i++)   {
      a[i]=0.0;
      for( j = 0; j < M; j++)   {
         a[i] +=   y[j]*pow(x[j],(double)i) ;
      }
   }
   /* 係数行列の作成 */
   for( i = 0; i <= N; i++)   {
      for( j = 0; j <= i;   j++ )   {
         p[i][j]=0.0;
         for( k =0; k < M; k++)   {
            p[i][j] += pow( x[k], (double)(i+j) );
         }
         p[j][i] = p[i][j];
      }
}
   /* 連立 1 次方程式を解く．結果は a に上書き */
    gauss2( p, a, N+1 );
   /* 結果の出力 */
```

input_func.dat

0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
2.0	2.12	1.62	2.57	1.53	2.0

output_func.dat

ベクトル x は次の通りです

0.00　0.20　0.40　0.60　0.80　1.00

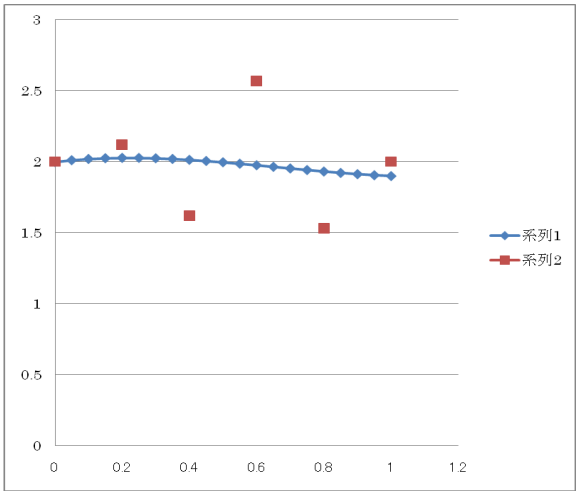
ベクトル y は次の通りです

2.00　2.12　1.62　2.57　1.53　2.00

最小 2 乗近似式は

y =　0.38 x^3 -　0.76 x^2 +　0.28 x^1 +　2.00 x^0

```
    fprintf( fout, "最小 2 乗近似式は  y =");
    for( i = N ; i >= 0 ; i--) {
            if(a[i]>0){
                    if(i==N){
                       fprintf(fout, " %5.2f x^%d ", a[i],i);
                    }
                    else{
                            fprintf(fout, "+ %5.2f x^%d ", a[i],i);
                    }
            }
            else{
                    fprintf(fout, "- %5.2f x^%d ", fabs(a[i]),i);
            }
    }
    fprintf(fout, "¥n");
}
```



スライド８　ラグランジュ補間　p.124

点(x_0,f_0), (x_1,f_1), … , (x_n,f_n) が与えられたとき，これらすべての 点(x_i,f_i) を通る曲線 y=f(x) を求めて $x_0 < x < x_n$ の与えられた点 以外の関数値を求めることを「　　」,「　　」 (interpolation)するという．　$f_k = f(x_k)$, k=0,1,⋯,n が与えられたとき，等式 $P(x_k) = f_k$, k=0,1,⋯,n を満たす多項式 P(x) を f(x) の「　　」式という．

定理 6.5 補間条件を満たす n 次多項式 Pn(x) はただ 1 つに定まる．

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

V の行列式：「　　」(Vandermonde)の行列，　解が「　　」に定まる．

スライド９　ラグランジュ補間　　p.125

n 次のラグランジュ補間多項式，ラグランジュ補間(Lagrange interpolation)

$$l_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

基本多項式 $l_i(x)$ の 点 x_k (0≦k≦n) での値は

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} := \begin{cases} 1 & (k = i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases}$$

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \delta_{ik} = f_k$$

スライド１０　ラグランジュ補間：プログラム　　p.125

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define N 9
/*  ベクトルの入力  */
void input_vector3( double b[N+1], char c, FILE *fin );
/*  ラグランジュ補間  */
double lagrange( double x[N+1], double y[N+1], double xi );

int main(void)
{
   FILE *fin, *fout;
   double x[N+1], y[N+1], xi;     /* xiは補間点  */
   printf("補間点を入力してください--->");
   scanf("%lf", &xi);
   /*  ファイルのオープン  */
   if ( (fin = fopen( "input_lag.dat", "r")) == NULL ){
         printf("ファイルが見つかりません ：input_lag.dat ¥n");
         exit(1);
   }
   if( (fout = fopen( "output_lag.dat", "w")) == NULL )
   {
      printf("ファイルが作成できません ：output_lag.dat ¥n");
      exit(1);
    }
   input_vector3( x, 'x', fin );       /*  ベクトルxの入出力  */
   input_vector3( y, 'y', fin );       /*  ベクトルyの入出力  */
   printf("補間の結果は、P(%f)=%f¥n", xi, lagrange(x,y,xi) );

   /*  グラフを描くために結果をファイルに出力  */
   for( xi = x[0]; xi <= x[N]; xi += 0.01 ){
      fprintf(fout, "%f ¥t %f¥n", xi, lagrange(x,y,xi) );
   }
   fclose(fin); fclose(fout);   /*  ファイルのクローズ  */
   return 0;
}

/*  ラグランジュ補間  */
double lagrange( double x[N+1], double y[N+1], double xi )
{
   int i, k;
   double pn = 0.0, li;

   /* P_n(x)の計算  */
   for ( i = 0; i <= N ; i++ ){
      li = 1.0;
      /* l_i(x)の計算  */
      for( k = 0; k <= N; k++ ){
         if( k != i ) li *= (xi -x[k]) / (x[i]-x[k]);
      }
      pn += li * y[i];
   }

   return pn;
}

/* b[0...N]の入力  */
void input_vector3( double b[N+1], char c, FILE *fin )
{
   int i;
   for( i = 0 ; i <= N ; i++)
   {
      fscanf(fin, "%lf", &b[i]);
   }
}
```

input_lag.dat

0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
2.0	2.1	1.6	2.6	1.5	2.7	0.67	3.5	0.94	2.0