２０２１年度前期　数値解析　第４回講義ノート

２０２１年５月１３日　三浦憲二郎

スライド１　反復法と縮小写像の原理　p.77

2 分法　　解の存在範囲を探索しながら狭めていく.「　　　　」法

ニュートン法　初期値 x0 から出発して解 α に収束するような列$\{x_n\}$を作り，x_n が α に十分近づいたときに計算を打ち切る.　「　　」法，あるいは「　　　　」法

- 反復法による列$\{x_n\}$

$$
\begin{aligned}
x &= g(x) \qquad (1)\\
x_{n+1} &= g(x_n) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

g(x)：「　　　」関数，式(1)　x：「　　　」，式(2)：「　　　」反復

$\phi(x)\neq 0$ となるように選んで，

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x-\phi(x)f(x)\\
x=g(x) &\Leftrightarrow \phi(x)f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0
\end{aligned}
$$

スライド２　ニュートン法　p.77

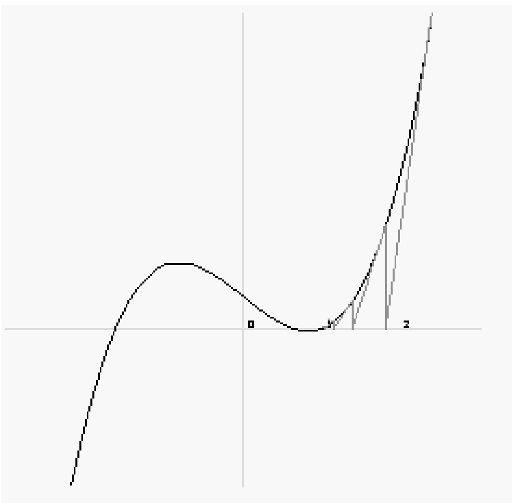
ニュートン法の原理

- 解 α の近傍で C^2 級とする.　（「　　　」関数が連続）
- 「　　　　」展開
- ニュートン反復列

$$0=f(\alpha)=f(x_0)+f'(x_0)(\alpha-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(\alpha-x_0)^2, \xi\in(x_0,\alpha) \text{ or } (\alpha,x_0)$$

$$
\begin{aligned}
0 &= f(\alpha)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\\
f(x_0)+f'(x_0)\Delta x &= 0 \quad \text{Hence} \quad \Delta x=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
\end{aligned}
$$

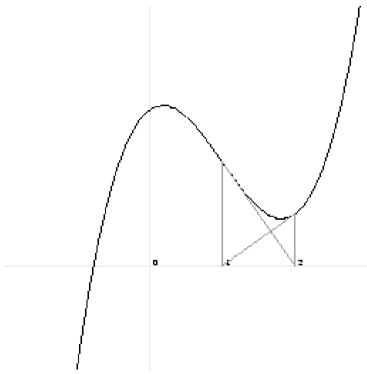
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



スライド３　ニュートン法：プログラム　p.81

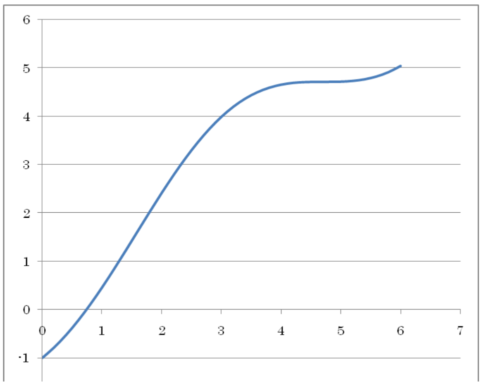
```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define EPS pow(10.0,-8.0) /* epsilon の設定 */
#define NMAX 10 /* 最大反復回数 */
void newton(double x); /* Newton 法 */
double f(double x);      /* f(x)の計算 */
double df(double x);     /* f'(x)の計算 */
int main(void){
        double x;
        printf("初期値 x0 を入力してください¥n");
        scanf("%lf",&x);
        newton(x);
        return 0;
}
void newton(double x){/* Newton 法 */
        int n=0; double d;
        do{
                d=-f(x)/df(x);
                x=x+d;
                n++;
        }while(fabs(d)>EPS&&n<NMAX);
        if(n==NMAX){
                printf("答えは見つかりませんでした¥n");
        }
        else{
                printf("答えは x=%f です．¥n",x);
        }
}
/* 関数の定義 */
double f(double x){
        return x-cos(x);
}
double df(double x){
        return 1.0+sin(x);
}
```

収束する場合



収束しない場合

実行結果　　　x-cos(x)=0
(1 回目)
初期値 x0 を入力してください.
３
答えは x=0.739085 です.
（2 回目)
初期値 x0 を入力してください.
4
答えがみつかりませんでした.



スライド４　収束の速さ　p.82

（１）　線形収束

α に収束する反復列$\{x_n\}$が

$$(x_{n+1}-\alpha)=(A+\epsilon)(x_n-\alpha),\ |A|<1,\ \lim_{n->\infty}\epsilon_n=0$$

A は「　　　　　」に依存しない定数

（２）　p 次収束

$$|x_{n+1}-\alpha|\le M|x_n-\alpha|^p,\ p>1,\ 0<M<\infty$$

M は「　　　　　」に依存しない定数

スライド５　収束の速さ　　p.82

定理 4.3　f(x)=0 の解 x ＝ α が単解のとき，ニュートン法は２次収束する．

（証明）

f（α）＝0,　f ’（α）≠0 に注意すると，テイラーの公式より

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

なぜならば,

$$= \frac{-(f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n))}{f'(x_n)}$$

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

スライド６　収束の速さ p.82

ニュートン法が収束するような区間において．$0 < A \leq |f'(x)|,\ |f''(x)| \leq B$

となるような定数 A, B を選べば,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{B}{2A}|x_n - \alpha|^2$$

が成り立つ．これはニュートン法が（収束するならば）2 次収束することを示している．

スライド７　Excel によるグラフ作成

２次関数のグラフ

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int main(void)
{
    int i; double x,y;
    FILE *fout;
    if((fout=fopen(”output.csv”,”w”))==NULL){
        printf(”ファイルは見つかりません:output.dat ¥n”);
        exit(1);
    }
    for(x=-3;x<=3;x+=0.2){
        y=x*x;
        fprintf(”%lf %lf¥n”,x,y);
    }
    fclose(fout);
}
```

output.csv を Excel で開く．データの書かれたセルを選択して，グラフ（散布図）を作成する．

−3	9
−2.8	7.84
−2.6	6.76
−2.4	5.76
−2.2	4.84
−2	4
−1.8	3.24
−1.6	2.56
−1.4	1.96
−1.2	1.44
−1	1
−0.8	0.64
−0.6	0.36
−0.4	0.16
−0.2	0.04
0	0
0.2	0.04
0.4	0.16
0.6	0.36
0.8	0.64
1	1
1.2	1.44
1.4	1.96
1.6	2.56
1.8	3.24
2	4
2.2	4.84
2.4	5.76
2.6	6.76
2.8	7.84
3	9