

## 2023年度 数値解析

### 共役勾配法 (きょうやくこうばいほう :conjugate gradient method) 確認問題

1.  $a > 0$ ,  $b > 0$  で定義される以下の行列は対称正定値行列であることを示せ.

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (1)$$

2. 以下の連立一次方程式を共役勾配法で解くことを考える。

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b} : \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (2)$$

- (a) 初期値を  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ,  $\mathbf{p}_0 = (1, 0)$  として,  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, M\mathbf{x}) - (\mathbf{x}, \mathbf{b})$  を最小化する  $\mathbf{x}_1$  を求めよ.  
(b)  $\mathbf{p}_0$  に直交する  $\mathbf{p}_1$  を求めよ。ただし, 直交する  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$  は  $(\mathbf{p}_1, M\mathbf{p}_0) = 0$  が成り立つ。  
(c)  $\mathbf{x}_1$  からスタートして  $\mathbf{p}_1$  方向で  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, M\mathbf{x}) - (\mathbf{x}, \mathbf{b})$  を最小化する  $\mathbf{x}_2$  を求めよ.