美的空間曲線

The Aesthetic Space Curve

○正　三浦　憲二郎 (静岡大学)

Kenjioro T. MIURA, Shizuoka University, 3-5-1 Johoku, Hamamatsu, Shizuoka

The curve is the most basic design element to determine shapes and silhouettes of industrial products and works for shape designers. If we can find equations of the aesthetic curves, it is expected that the quality of the curve design improves drastically because we can use them as standards to generate, evaluate, and deform the curves. The authors have proposed the general equations of aesthetic curves as such a standard. We show the essential improtance of the self-affinity and extend the aesthetic plane curve into 3-dimensional space.

Key Words: Aesthetic Curve, Self-Affinity, Aesthetic Space Curve

1　緒言

「美しい曲線」は原田ら [1] により曲率対数分布図が直線で近似される曲線として提案された．三浦 [2, 3] は曲率対数分布図が厳密に直線で与えられる曲線の解析解を求め，それを「美しい曲線の一般式」として提案した．さらに，吉田と斎藤 [5] は「一般式」によって定義される曲線の特徴を解析，分類するとともに，3 個の "制御点" により，2 つの端点とそこでの接線方向，および曲率対数分布図の直線の傾き α を与えることにより対話的に「美しい曲線セグメント」を生成する手法を提案した．本研究では「美しい曲線の一般式」を満足する曲線を美的曲線とよぶ．

美的曲線の導出は，曲率対数分布図に基づいて行われたが，本研究では曲線に特有の形式として定義される自己アフィン性 [3] が同等に本質的に重要であることを示す．すなわち，曲線が滑らかである (厳密には C^3 連続性を持つ) 場合には，自己アフィン性を持つことと曲率対数分布図が厳密に直線で与えられることとが等価であること示す．したがって，自己アフィン性のみからでも美的曲線が導出でき，さらには自己アフィン性の概念を空間曲線に拡張し，美的空間曲線を定義することができる [4].

2　美的曲線

2.1　美しい曲線の一般式

曲線の曲線長 (弧長, 路長) を s，曲率半径を ρ とすると，曲率対数分布図の横軸は $\log\rho$，縦軸は $\log(ds/d(\log\rho)) = \log(\rho\, ds/d\rho)$ となる．曲率対数分布図が直線で与えられることから，ある定数 α が存在して，

$$\log(\rho\frac{ds}{d\rho}) = \alpha\log\rho + C \tag{1}$$

が成り立つ．ここで C は定数である．この式を美しい曲線の基本方程式とよぶ．式 (1) を変形すると，$(1/\rho^{\alpha-1})ds/d\rho = e^C = C_0$ したがって，ある定数 c_0 が存在して，

$$\rho^{\alpha-1}\frac{d\rho}{ds} = c_0 \tag{2}$$

2.2　平面曲線の自己アフィン性

平面曲線の自己アフィン性を次のように定義する [2]．**平面曲線の自己アフィン性**：曲線の任意の先端部を削除した曲線に対して，曲線上の各点において接線方向と主法線方向に，別々に異なる拡大縮小率でスケーリングすることにより元の曲線がえられるとき，曲線は自己アフィン性を持つ．

与えられた曲線が式 (2) を満たせばこの定義による自己アフィン性を持つ [3].

3　自己アフィン性を持つための必要十分条件

曲線長 $s \geq 0$ をパラメータとして定義された曲線 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(s)$ が，その曲率，したがって曲率半径の微分まで連続であると仮定する．したがって，曲線は C^3 連続性を持つ．また，その曲率半径 $\rho(s)$ は 0 でないと仮定する．

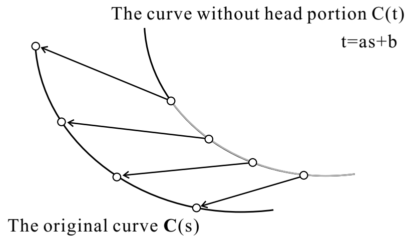

図 1: The reparametrized and original curves

接線方向と主法線方向に別々の倍率でスケーリング (曲線に対するアフィン変換 [2]）し，元の曲線 $\boldsymbol{C}(s)$ に一致させることを考える．そこで，与えられた曲線 $\boldsymbol{C}(s)$ を図 1 のように $t = as + b$ $(a, b > 0)$ により再パラメータ化する．曲線 $\boldsymbol{C}(t)$ を接線方向に一様にスケーリングすることは，図 1 に示すように点 $\boldsymbol{C}(t_0 = as_0 + b)$ を点 $\boldsymbol{C}(s_0)$ に対応付けることと等しい．このとき，接線方向の拡大縮小率 f_t は $1/a$ となる．

a と b は定数であるが，接線方向と主法線方向の拡大縮小率 f_t と f_n に関連しており，曲線の形状に依存しそれらを独立に指定することはできない．曲線 $\boldsymbol{C}(t)$ の始点は $s = 0$ を代入してえられる $\boldsymbol{C}(b)$ であり，$\boldsymbol{C}(t)$ は元の曲線 $\boldsymbol{C}(s)$ の $0 \leq s < b$ に対応する部分を削除した曲線となっている．

曲線が自己アフィン性を持つための条件は，任意の $b > 0$ に対して, ある $a > 0$ が定まり，それらの a, b について，任意の $s \geq 0$ に対して次式が成り立つ，ことと考えられる．

$$\frac{\rho(s)}{\rho(as+b)} \quad = \quad f_n \tag{3}$$

ここで，f_n は b に依存して定まる定数であり，主法線方向の拡大縮小率となっている．f_n の値はこの式に $s = 0$ を代入し，$f_n = \rho(0)/\rho(b)$ と求まる．

$f_n = 1$ の場合は $\rho(s)$ は定数となり，円弧, あるいは直線 $(\rho(s) = \infty)$ を表す．以下では $f_n \neq 1$ と仮定する．

式 (3) を変形すると，

$$\rho(s) - f_n\,\rho(as+b) = 0 \tag{4}$$

曲率半径 $\rho(s)$ が微分可能であることから，

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(s)}{ds} \quad - \quad a\,f_n\,\frac{d\rho(t)}{dt}\bigg|_{t=as+b} \\ = \quad \frac{d\rho(s)}{ds} - \frac{f_n}{f_t}\,\frac{d\rho(t)}{dt}\bigg|_{t=as+b} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

上式に $s = 0$ を代入して変形すると，

$$f_t = f_n\frac{\frac{d\rho(b)}{dt}}{\frac{d\rho(0)}{ds}} \tag{6}$$

したがって，f_n, f_t ともに 2 つの曲線の始点の曲率半径とその微分値により一意に定まる．

3.1 $f_n/f_t = 1$ の場合

まず，ある $b > 0$ に対して $f_n/f_t = 1$ となる場合，3.3 節と同様の議論により任意の b について $f_n/f_t = 1$ となる．このとき，

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = \left.\frac{d\rho(t)}{dt}\right|_{t=as+b} \tag{7}$$

となる．この式から，

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = c_0 \tag{8}$$

c_0 は定数であり，この式を積分すると，

$$\rho(s) = c_0\, s + c_1 \tag{9}$$

ここで，c_1 は積分定数である．式 (9) は対数らせんの曲率半径と直線長の関係式となっており，曲線は f_t と f_n が一致している特別な自己アフィン性，すなわち自己相似性を持つ．

3.2 $f_n/f_t \neq 1$ の場合

次に，$f_n/f_t \neq 1$ の場合は $f_n \neq 1$ なので，ある定数 α が存在して，

$$\frac{f_n}{f_t} = f_n^{1-\alpha} \tag{10}$$

が成り立つ．この式を式 (5) に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{d\rho(s)}{ds} &= f_n^{1-\alpha}\left.\frac{d\rho(t)}{dt}\right|_{t=as+b} \\ \frac{d\rho(s)}{ds} &= \left\{\frac{\rho(s)}{\rho(as+b)}\right\}^{1-\alpha}\left.\frac{d\rho(t)}{dt}\right|_{t=as+b}\end{aligned} \tag{11}$$

したがって，

$$\rho(s)^{\alpha-1}\frac{d\rho(s)}{ds} = \rho(as+b)^{\alpha-1}\left.\frac{d\rho(t)}{dt}\right|_{t=as+b} \tag{12}$$

以上より，もし α が b に依存しないのであれば，式 (2) に等しい次式がえられる．

$$\rho(s)^{\alpha-1}\frac{d\rho(s)}{ds} = c_0 \tag{13}$$

ただし，c_0 は定数である．この式を積分することにより，美しい曲線の第 1 一般式と第 2 一般式がえられる [2].

3.3 α が b に依存しないことの証明

この節では α が b に依存しないことを証明する．ここでは b が微小である場合を考え，その微小量を $\Delta b > 0$ とする．Δb に対応して一意に定まる a の値を $1+\Delta a$，あるいは $1-\Delta a$，$(\Delta a > 0)$ とする．b が正であることの制限を緩め $b = 0$ の場合を考え $\Delta b = 0$ とすると，式 (3) は自分自身を対応させるので $a = 1$，したがって $\Delta a = 0$ となる．このとき $f_n = 1$ である．$0 \leq s < \Delta b$ に対応する部分を削除した曲線に対して，式 (3) が成り立つとともに式 (10) より，

$$\frac{\rho(s)}{\rho((1\pm\Delta a)s+\Delta b)} = f_n = \left\{\frac{f_n}{f_t}\right\}^{1-\alpha} \tag{14}$$

を満たす α が存在する．a は b の連続関数であり，Δb を小さくすれば Δa をいくらでも小さくすることができる．

式 (3) において，その s を $(1\pm\Delta a)s+\Delta b$ で繰り返し置き換えて代入すると，

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{\rho(s)}{\rho((1\pm\Delta a)s+\Delta b)} \\ f_n &= \frac{\rho((1\pm\Delta a)s+\Delta b)}{\rho((1\pm\Delta a)^2\, s+\Delta b((1\pm\Delta a)+1))} \\ &\cdots \\ f_n &= \frac{\rho((1\pm\Delta a)^{m-1}s+\Delta b((1\pm\Delta a)^{m-2}+\cdots+1))}{\rho((1\pm\Delta a)^m\, s+\Delta b((1\pm\Delta a)^{m-1}+\cdots+1))}\end{aligned}$$

これらの式から，

$$\frac{\rho(s)}{\rho((1\pm\Delta a)^m\, s+\Delta b((1\pm\Delta a)^{m-1}+\cdots+1))} = f_n^m$$

したがって，$b = \Delta b((1\pm\Delta a)^{m-1}+\cdots+1)$ に対する接線方向の拡大縮小率は $1/(1\pm\Delta a)^m = f_t^m$ であり，

$$f_n^m = \left\{\frac{f_n^m}{f_t^m}\right\}^{1-\alpha} \tag{15}$$

となり α は Δb に対する値に一致している．ここまでの議論で，離散的な b の値に対して α が一定であることが示された．任意の b について α が一定であることは $\epsilon-\delta$ 論法に基づく背理法により証明できる [4].

3.4 空間曲線の自己アフィン性

平面曲線の自己アフィン性と同様に空間曲線の自己アフィン性を次のように定義する: 曲線の任意の先端部を削除した曲線に対して，曲線上の各点において接線方向，主法線方向，および従法線方向にそれぞれ異なる倍率でスケーリングすることにより元の曲線がえられるとき，曲線は自己アフィン性を持つ．

曲率 κ と捩率 τ，したがってそれらの逆数である曲率半径 ρ と捩率半径 $\mu = 1/\tau$ とは独立に指定できるので，τ について式 (1) と同様な式が成り立つと仮定する．平面曲線の自己アフィン性の必要十分条件が式 (2) であることを示したのと同様の方法で，空間曲線の自己アフィン性の必要十分条件が同等の式で与えられることが示せる [4].

フルネー・セレーの公式を連立微分方程式と考え，数値積分により曲線の形状を求めた例を図 2 に示す．左右の図は同じ 5 本の曲線を異なる視点で描画しており，図中最も下に描かれたの曲線は捩率を常に 0 に保ち曲率半径を曲線長の 1 次式として変化させて，平面曲線である対数らせんを描いている．他の曲線は始点と，曲率半径の変化をこの対数らせんと一致させ，捩率半径については $\beta = 1$ として曲線長の 1 次式として変化させている．

図 2: An example of the aesthetic space curve

4 結言

本研究では，美的曲線の性質として自己アフィン性が本質的に重要であることとを示すとともに，その概念を 3 次元空間に拡張し美的曲線の 3 次元への拡張法を提案した．

参考文献

[1] 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の物理的性質と自己アフィン性，デザイン学研究, Vol.42, No.3, pp.33-40, 1995.

[2] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, 2005.

[3] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性，精密工学会誌，Vol.72, No.7, pp.857-861, 2006.

[4] 三浦憲二郎, 藤澤誠，美的曲線の 3 次元への拡張と B-spline 曲線による近似, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, pp.83-88, 2006.

[5] 吉田典正, 斎藤隆文, 美しい曲線の全体像解明と対話的制御, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, pp.77-82, 2006.