

アルキメデス螺旋, フェルマー螺旋, リチューズ螺旋, および双曲螺旋を含む 代数螺旋の提案とその性質

静岡大学 ○三浦憲二郎, 白杵深, 關根惟敏

1 緒言

螺旋は自然現象の中に多く現われているとともに, 様々な人工物にも応用されている [1]. 螺旋は以下のように定義される.

定義 1 (螺旋) 曲率の導関数が 0 にならない曲線を螺旋と定義する. とくに, 曲率が単調増加である曲線を正の螺旋, 曲率が単調減少である曲線を負の螺旋とよぶ.

曲率の導関数が 0 にならなければ, 曲率は単調増加となるか, あるいは単調減少となるため, 正の螺旋, 負の螺旋と分類される. この定義によれば, 形状パラメータ α が $-1 < \alpha < 0$ である対数型美的曲線 [2] は螺旋とならない場合があるが, $\alpha \leq -1$, あるいは $\alpha \geq 0$ である対数型美的曲線 (対数螺旋やクロソイド曲線を含む) は螺旋である.

2 様々な螺旋

代表的な螺旋には, 対数螺旋, アルキメデス螺旋, フェルマー螺旋, リチューズ螺旋, および双曲螺旋があり, それらについて以下で説明する.

2.1 対数螺旋

対数螺旋 (logarithmic spiral) は等角螺旋 (equiangular spiral), あるいはベルヌーイ螺旋とも呼ばれ, オウム貝の形状を表す曲線としても知られている [3]. ギリシャ・ローマ時代から美しさの源泉とされる黄金分割とも密接な関係があり, 美しい曲線の代表とされている.

2.2 代数螺旋

代数螺旋は代数式で表される螺旋である. 代数式は, 加法, 減法, 乗法, 除法, および開法 ($\sqrt{\quad}$) により得られる式である. 対数螺旋を極座標で表すとその動径 (半径) は $r = a^\theta$ であり, 対数螺旋はべき乗を含み代数螺旋ではない. 表題に挙げたアルキメデス螺旋, フェルマー螺旋, リチューズ螺旋, および双曲螺旋は, 以下に示すように代数螺旋である.

アルキメデス螺旋の極座標表示は, 動径を r , 偏角を θ とすると, $r = a\theta + b$ と表される. ここで, a, b は定数である. 同様に, フェルマー螺旋, リチューズ螺旋, および双曲螺旋はそれぞれ, $r = a\sqrt{\theta}, r = a/\sqrt{\theta}, r = a/\theta$ である. ここで, a は定数である. 図 1 に代数螺旋の例を示す. 上式より, 動径 r は θ の代数式で表わされており, これらが代数螺旋であることがわかる. 曲線の定義域は $\theta > 0$ であることに注意する. 曲線の定義域を $\theta < 0$, さらに双曲螺旋を除いて $\theta \leq 0$ に拡張するためには, たとえばフェルマー螺旋では,

$$r = \begin{cases} a\sqrt{\theta} & \theta \geq 0, \\ -a\sqrt{-\theta} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

と定義すればよい. このとき, $\theta > 0$ の曲線と $\theta < 0$ の曲線は原点を中心として点対称となる.

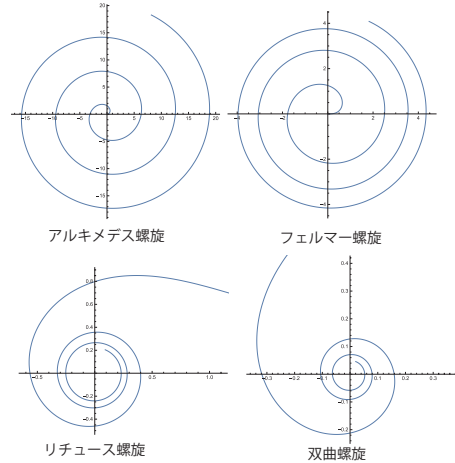


図 1: 代数螺旋

3 代数螺旋の一般化

対数型美的曲線は, 対数螺旋やクロソイド曲線の曲率半径 ρ やその逆数を曲線長の 1 次式として表わすだけでなく, ρ のべき乗を 1 次式として表すことで定式化された [4]. ここでも, 同様の拡張を代数螺旋に施すことで一般化する. すなわち, アルキメデス螺旋や双曲螺旋の動径 r を偏角 θ やその逆数の 1 次式として表すだけでなく, r のべき乗を 1 次式として表すことで定式化する. すなわち,

$$r^\alpha = a\theta + b \quad (2)$$

ここで, α, a , および b は定数である. 本研究ではこの螺旋を対数型美的曲線の命名法に準じて, 対数型代数螺旋 (log-algebraic spiral: LAS) とよぶ.

アルキメデス螺旋はすでにこの形式であり, その α 値は 1 である. また, この形式をフェルマー螺旋, リチューズ螺旋, および双曲螺旋に適用すると, $r^2 = a^2, r^{-2} = \theta/a^2, r^{-1} = \theta/a$ と表せ, それらの α はそれぞれ 2, -2, -1 である.

3.1 代数螺旋の接線, 曲率

対数型代数螺旋の曲線式 $C(\theta)$ は複素平面上で次式で与えられる.

$$C(\theta) = re^{i\theta} = (a\theta + b)^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\theta} \quad (3)$$

したがって, $\alpha \neq 0, 1$ において接線 $dC(\theta)/d\theta$ は,

$$\frac{dC(\theta)}{d\theta} = \left(\frac{a}{\alpha} + i(a\theta + b)\right)(a\theta + b)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{i\theta} \quad (4)$$

となる。

極座標表示された滑らかな (たとえば無限回微分可能な) 曲線 $r(\theta)$ の曲率 $\kappa(\theta)$ は次式で与えられる [1]

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

上式を用いて対数型代数螺旋の曲率を求めると以下となる。ただし、 b は螺旋のどの部分を切り出すかを定める定数であり、簡単化のために $b = 0$ とした。ここでは、 $\theta > 0$ を定義域とする。

$$\kappa(\theta) = \frac{\alpha^2\theta^2 + \alpha + 1}{(\alpha^2\theta^2 + 1)\sqrt{\frac{(\alpha^2\theta^2 + 1)(\alpha\theta)^2/\alpha}{\alpha^2\theta^2}}} \quad (6)$$

上式を t で微分することで $d\kappa(\theta)/d\theta$ が以下のように得られる。

$$\frac{d\kappa(\theta)}{d\theta} = \frac{\alpha^2(1 - \theta^2(\alpha^2(\theta^2 + 2) + 2)) - 1}{\alpha\theta(\alpha^2\theta^2 + 1)^2\sqrt{\frac{(\alpha^2\theta^2 + 1)(\alpha\theta)^2/\alpha}{\alpha^2\theta^2}}} \quad (7)$$

この式の分子は θ の 4 次式であり、根号の正負を考慮して $d\kappa(\theta)/d\theta = 0$ を満たす θ は、

$$\theta = \sqrt{-1 - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 + 3}}{\alpha}} \quad (8)$$

であり、 $\alpha < -1$, および $\alpha > 1$ において $d\kappa(\theta)/d\theta = 0$ を満たす θ が存在する。

たとえば、 $\alpha = 2$ (フェルマー螺旋) とすると、

$$\theta = \sqrt{-\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{7}}{2}} \approx 0.269955 \quad (9)$$

したがって、図 2 に示すように、曲率は増加してから $\theta = 0.269955$ を境に減少する。定義 1 の意味では、この曲線は 2 本の螺旋から構成されている。

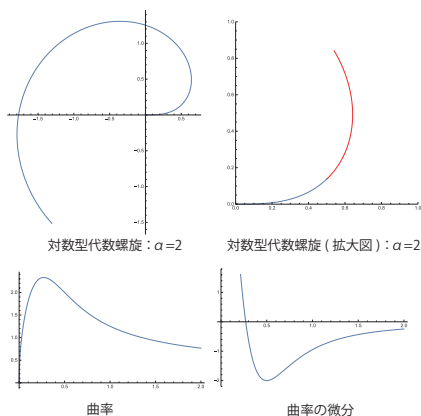


図 2: 対数型代数螺旋 (フェルマー螺旋) : $\alpha = 2$

図 3 は $\alpha = -2$ (リチウス螺旋) を示しており、曲率グラフ、曲率微分グラフからわかるように、 $\kappa = 0$ となる変曲点 ($\theta = 0.5$) を持つとともに、 $d\kappa/d\theta = 0$ となる点 ($\theta = \sqrt{-5/4 + \sqrt{7}/2} \approx 0.269955$: フェルマー螺旋と同じ値) を持っている。上の図は変曲点の前後で色を変えた曲線、その下の図は螺旋となる 2 曲線を色を変えて描画している。

図 4 は $\alpha = -1.5$ の LAS を示しており、リチウス螺旋と同様の性質を持ち、 $\kappa = 0$ となる変曲点 ($\theta \approx 0.471405$) を持つとともに、 $d\kappa/d\theta = 0$ となる点 ($\theta \approx 0.288237$) を持っている。図 3 と同様上の図は変曲点の前後で色を変えた曲線、その下の図は螺旋となる 2 曲線を色を変えて描画している。

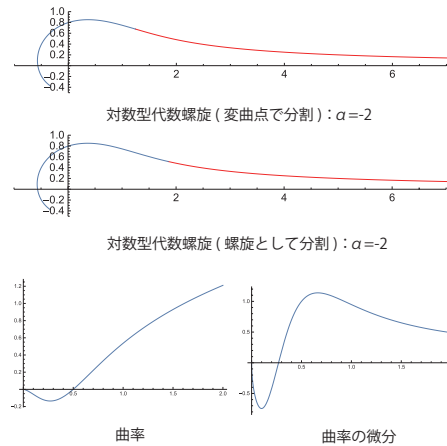


図 3: 対数型代数螺旋 (リチウス螺旋) : $\alpha = -2$

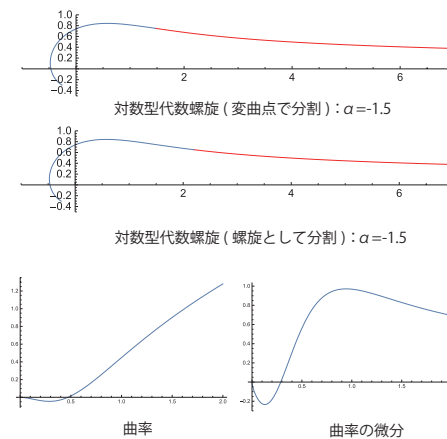


図 4: 対数型代数螺旋 : $\alpha = -1.5$

4 結言

本研究では、アルキメデス螺旋、フェルマー螺旋、リチウス螺旋、および双曲螺旋を含む対数型代数螺旋 (log-algebraic spiral) を提案した。今後、この曲線の性質についてさらに研究を進めるとともに、意匠設計やイラスト等のデザインへの応用について研究する。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費基盤研究 (B)19H02048, 25289021, 挑戦的萌芽研究 26630038, および ImPACT「タフ・ロボティクス・チャレンジ」の助成、および H30 年度九大 IMI 短期共同研究「離散微分幾何の新展開. 意匠設計から建築設計へ」の支援を受けた。

参考文献

- [1] 三宅探香, 螺旋の幾何学, 兵庫教育大学博士論文, 2014.
- [2] Kenjiro T. Miura, R.U. Gobithaasan, "Aesthetic Design with Log-Aesthetic Curves and Surfaces," Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, Springer Singapore, pp.107-119, 2016.
- [3] 高木隆司, 形の数理, 朝倉書店, (1992).
- [4] 三浦憲二郎, "美しい曲線の一般式とその自己アフィン性," 精密工学会誌 Vol.72, No.7, pp.857-861, 2006.