

# 制御点入力による複合リズムを持つ美的曲線の生成

Generation of Compounded-Rhythm Aesthetic Curves from Control Points

上利 真一 (静大)      川田 洋平 (静大)  
藤澤 誠 (静大)      正 三浦憲二郎 (静大)

Shin'ichi AGARI, Shizuoka University, Naka-ku, Hamamatsu, Shizuoka  
Yohei KAWATA, Shizuoka University  
Makoto FUJISAWA  
Kenjiro T. MIURA

The aesthetic curves include the logarithmic (equiangular) spiral, clothoid, and involute curves. Although most of them are expressed only by an integral form of the tangent vector, it is possible to interactively generate and deform them and they are expected to be utilized for practical use of industrial and graphical design. However, their input method proposed so far by use of three so-called control points can generate only an aesthetic curve segment with monotonic curvature variation and can not create a curve with the compounded-rhythm. Hence for four input control points with two specified  $\alpha$  values, we propose a technique to generate a compounded-rhythm aesthetic curve.

*Key Words:* Aesthetic curve, Compounded-rhythm curve,  $G^3$  continuity

## 1 緒言

「美しい曲線」は原田ら [1, 2] により曲率対数分布図が直線で近似される曲線として提案された。三浦 [3, 4] は曲率対数分布図が厳密に直線で与えられる曲線の解析解を求め、それを「美しい曲線の一般式」として提案した。さらに、吉田と斎藤 [5, 6] は「一般式」によって定義される曲線の特徴を解析、分類するとともに、3 個の“制御点”により、2 つの端点とそこでの接線方向、および曲率対数分布図の直線の傾き  $\alpha$  を与えることにより対話的に「美しい曲線 (美的曲線) セグメント」を生成する手法を提案した。

美的曲線は、対数 (等角) らせん ( $\alpha = 1$ )、クロソイド曲線 ( $\alpha = -1$ )、さらにインボリュート曲線 ( $\alpha = 2$ ) を含むとともに、接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合 ( $\alpha \neq 1, 2$ ) であっても対話的な生成、変形が可能であり、実務への応用が期待されている。しかしながら、吉田らの入力法では、曲率が単調に増加、または減少する美的曲線セグメント 1 本しか入力することができず、複合リズム [2] を持つ美的曲線を入力することができない。複合リズムを持つ美的曲線、すなわち複合リズム美的曲線とは、 $\alpha$  が異なる 2 本の美的曲線セグメントが、1) 曲率が連続で接続しているとともに、2) 曲率の微分も連続に接続された曲線であり、 $G^3$  連続性の保証された 2 本の美的曲線セグメントから構成される曲線である。複合リズム曲線は、欧州のカロツツェリア (自動車工作工房) のデザインした自動車の曲線として頻繁に使われており [2]、意匠デザインにとって重要な曲線と考えられる。そこで、本研究では複合リズム美的曲線の入力法を提案する。

曲線の入力法としては、通過点を指定する方法と制御点を用いる方法が代表的であるが、入力の容易さ、制御性の良さから、本研究では制御点を用いる方法について研究を行った。

## 2 複合リズム美的曲線の入力法

複合リズム曲線の入力法として、原田ら [2] は曲線の通過点を求め、それらを  $n$  次曲線で近似する方法を提案しているが、美的曲線が解析的に定式化される以前の研究であり、解析的に明らかにされた美的曲線の性質を十分に活用できていない。また、吉田らの美的曲線セグメントの入力法は 2 分法を用いているため、高速に曲線を生成することができ、それを複数回用いて複合リズム曲線を生成することが考えられる。しかしながら、彼らの入力法では与えられた 3 点の制御点のなす角を利用し求める曲線の相似形を探索するため、曲率の連続性を 2 本のセグメント間で保証するための手法としては適しておらず、さらに曲率の微分の連続性を保証するためには試行錯誤的な探索が必須である。

そこで、本研究では相似形の探索を行うのではなく、美的曲線のパラメータを直接探索することにより、複合リズム美的曲線を算出する。特に、デザイナーにとって操作しやすい曲線の入力法を提供するために、前後のセグメントに対して任意に与えられた 2 つの  $\alpha$  値に対して、4 点の制御点から複合リズム美的曲線を生成する手法を提案する。

本研究で提案する手法により生成される複合リズム美的曲線は、3 次 Bézier 曲線と同様、始点、終点はそれぞれ第 1 制御点、第 4 制御点に一致し、それらの位置での接線方向は、それぞれ第 2 制御点と第 1 制御点、第 4 制御点と第 3 制御点の差のベクトルの方向として与えられる。

## 3 複合リズム美的曲線の一般式

美的曲線の定式化には  $\alpha \neq 0$  と  $\alpha = 0$  の 2 つの場合に大別される [3] が、 $\alpha = 0$  は例外的であり、 $\alpha = 1$  の場合は曲線は対数らせんとなり積分形を用いることなく定式化できる。そこで、本研究では  $\alpha \neq 0, 1$  と仮定する。

### 3.1 美的曲線

$\alpha \neq 0$  の場合，美的曲線の曲率半径  $\rho$  と曲線長  $s$  との間には次式の関係が成り立つ．

$$\rho^\alpha = cs + d \quad (1)$$

ここで， $c, d$  は定数である．曲線長  $s$  と接線の方向角  $\theta$  の関係は次式で与えられる．

$$\theta = \frac{1}{c} \frac{\alpha}{\alpha - 1} (cs + d)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \theta_e \quad (2)$$

ここで， $\theta_e$  は  $s = 0$  での方向角により定まる定数（角度）である．曲線を複素平面で表し， $P_0$  を曲線の始点， $i = \sqrt{-1}$  とすると，曲線上の点  $P(s)$  の座標は次式で与えられる．

$$P(s) = P_0 + \int_0^s \exp \left( i \left( \frac{1}{c} \frac{\alpha}{\alpha - 1} (cs + d)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \theta_e \right) \right) ds \quad (3)$$

### 3.2 複合リズム曲線

複合リズム曲線は 2 本の美的曲線セグメントにより構成され，異なる 2 つの  $\alpha$  値に対して，曲率半径  $\rho$  と曲線長  $s$  の関係は次のように表される．

$$\rho = \begin{cases} (c_0s + d_0)^{\frac{1}{\alpha_0}} & (0 \leq s \leq s_c) \\ (c_1s + d_1)^{\frac{1}{\alpha_1}} & (s_c < s \leq s_l) \end{cases} \quad (4)$$

$s_c$  はセグメントの接続点までの曲線長であり，この点を境に  $\alpha$  値，および  $c, d$  の値が変化する． $s_l$  は曲線の全長である．

以上の定式化から，複合リズム美的曲線は  $s$  が  $0 \leq s \leq s_c$  の範囲では  $P(s)$  は次式で表わされ，

$$P_0 + \int_0^s \exp \left( i \left( \frac{1}{c_0} \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} (c_0s + d_0)^{\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}} + \theta_{e0} \right) \right) ds \quad (5)$$

$s$  が  $s_c < s \leq s_l$  の範囲では次式で表わされる．

$$P_c + \int_{s_c}^s \exp \left( i \left( \frac{1}{c_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} (c_1s + d_1)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} + \theta_{e1} \right) \right) ds \quad (6)$$

$P_c$  はセグメントの接続点， $\theta_{e1}$  は  $c_1, d_1$ ，および接続点での曲線の方向角  $\theta_c$  に依存して定まる．

### 3.3 接続条件

2 本のセグメントは，接続点において 1) 位置，2) 接線ベクトル，3) 曲率半径，4) 曲率半径の変化率が連続となっている．位置，および接線ベクトルはそれぞれ  $P_c$ ， $\theta_{e1}$  に適切な値を指定することにより連続性が保証される．接続点での曲率半径を  $\rho_c$  とすると，曲率半径の連続の条件を数式で表すと以下となる．

$$\rho_c = (c_0s_c + d_0)^{\frac{1}{\alpha_0}} = (c_1s_c + d_1)^{\frac{1}{\alpha_1}} \quad (7)$$

また， $\rho_c^{\alpha_0} = c_0s_c + d_0$  と  $\rho_c^{\alpha_1} = c_1s_c + d_1$  を曲線長で微分して，

$$\alpha_0 \rho_c^{\alpha_0-1} \frac{d\rho_c}{ds} = c_0 \quad (8)$$

$$\alpha_1 \rho_c^{\alpha_1-1} \frac{d\rho_c}{ds} = c_1 \quad (9)$$

上記の 2 つの等式の曲率半径の変化率  $d\rho_c/ds$  が一致することから  $c_1$  は，

$$c_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} c_0 \rho_c^{\alpha_1-\alpha_0} \quad (10)$$

と表される．また，式 (7) より，

$$d_1 = \rho_c^{\alpha_1} - c_1 s_c \quad (11)$$

と表される．

$\alpha_0, \alpha_1$  の値はデザイナーが与えており，接続点での方向角  $\theta_c$  を定めれば 1 本目のセグメントの曲線長  $s = s_c$  が定まり， $c_0, d_0$  を決定すれば，接続点  $P_c$  において曲率半径  $\rho$  と曲率変化率  $d\rho/ds$  が連続となる条件から  $c_1, d_1$  の値は一意に定まる．

### 3.4 適切な $c_0, d_0$ の範囲

これまでの議論からわかるように，複合リズム美的曲線の接続点での接線方向を指定すれば，与えられた 4 点の制御点に対して適切な  $c_0, d_0$  を定めれば端点での条件を満たす複合リズム曲線が得られる． $c_0, d_0$  の値は数値的に探索する必要があり，例えば，2 変数に対する Newton 法（例えば [7] 参照）を用いて，曲線の終点を第 4 制御点に一致させる．ここで注意すべきことは， $c_0, d_0$ ，さらにはそれらの値から定まる  $c_1, d_1$  に対して，式 (4) において正の実数として曲率半径が定まる必要があり，以下の条件を満足しなければならない．

$$c_0s + d_0 > 0 \quad (0 \leq s \leq s_c) \quad (12)$$

$$c_1s + d_1 > 0 \quad (s_c < s \leq s_l) \quad (13)$$

これらの式における接続点までの曲線長  $s_c$ ，曲線の全長  $s_l$  は  $c_0, d_0$  により定まるが，これらの値も適正な値 ( $0 < s_c < s_l$ ) であることが必要である．以上の条件を満足させながら  $c_0, d_0$  を探索する．

## 4 曲線の生成

4 個の制御点から複合リズム美的曲線を生成する手順を以下に述べる．

### 4.1 制御点の入力

まず，4 点の制御点を入力する．これらの点により定義される 3 次 Bézier 曲線と同様に，始点，終点の座標  $P_0, P_1$  と接線の方向角  $\theta_0, \theta_1$  を定める．さらに，セグメント間の接続点での曲線の方向角  $\theta_c$  を指定する．例えば，第 1 制御点と第 2 制御点の midpoint から第 3 制御点と第 4 制御点の midpoint の方向ベクトルに一致する方向角とする．複合リズム曲線では，曲線全体に対して曲率は単調減少，または単調増加であり，変曲点を持たないので，4 点を結ぶ折れ線は常に進行方向に対して左に曲がる，あるいは右に曲がるように指定する．曲率は左曲がりを正としているので，右曲がりの場合には制御点の，例えば第 1 制御点と第 2 制御点を結ぶ直線に対して鏡像を生成し，それらの点に対してから曲線を生成した後，その直線に対して鏡像を生成する．

### 4.2 $\alpha_0, \alpha_1$ の設定

2 本のセグメントの  $\alpha$  値を指定する．原田らが提案した複合リズム曲線は 2 種類に分類され [2]，1 つは  $\alpha$  値が正から負に変化する曲線，他方は負から正に変化する曲

線である。したがって、それらの場合に適合する複合リズム曲線を生成するには  $\alpha_0$  と  $\alpha_1$  の値の正負を変えて指定する。

### 4.3 $c_0, d_0$ の探索

$c_0, d_0$  に初期値を与え、式 (5), (6) を用いて、始点から角度  $(\theta_c - \theta_0)$  だけ曲線セグメント ( $\alpha_0$ ) を生成し、接続点から角度  $(\theta_1 - \theta_c)$  だけ曲線セグメント ( $\alpha_1$ ) を生成して、曲線の終点を得る。初期値は、例えば 4 個の制御点の重心を端点とし、そこでの方向角と接続点での方向角が一致し、さらに第 1 制御点での条件を満足するような美的曲線セグメントを吉田らの方法で求める。得られた曲線から  $c_0, d_0$  を求め、それらの値を初期値とする。2 変数に対する Newton 法により  $c_0, d_0$  の変化量  $\Delta c_0, \Delta d_0$  を求めるが、 $c_0 + \Delta c_0, d_0 + \Delta d_0$  が条件 (12) を満たさない場合には変化量を満たすまで減少させる。

## 5 曲線の生成例

複合リズム美的曲線の生成例を図 1 に示す。 $\alpha_0 = 0.1, \alpha_1 = -0.1$  を指定し、図 2 に示すように、曲率対数分布図の傾きが正から負に変化する複合リズム曲線を生成した。この図からわかるように、曲率対数分布図が各セグメントに対して直線で表されること、したがって美的曲線であること、また曲率対数分布図が連続であることから、曲率の変化率が連続であること、したがって  $G^3$  連続性が保証されていることがわかる。

図 3 に曲線長に対する曲率半径のグラフを示す。グラフ中の  $\times$  印は接続点の位置を示しており、前後のセグメント間で曲率が連続であること、また曲率が単調増加であることがわかる。

## 6 結言

本論文では、与えられた 4 個の制御点を用いて、異なる  $\alpha$  値を持つ 2 本の美的曲線セグメントから成る複合リズム美的曲線の生成法を提案した。本手法により、指定された  $\alpha$  値を持ち、曲率対数分布が折れ線状になる曲線を作成することを可能とした。

今後は、3 本以上のセグメントから成るより複雑なリズムを持つ美的曲線の生成法について研究を行うとともに、複合リズム美的曲線を利用したスタイリング CAD システムを開発する。

## 参考文献

- [1] 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol.13, No.4, pp.149-158,1998.
- [2] 原田利宣, 森山真光, 吉本富士市, 複合リズム曲線とその創成手法, デザイン学研究, Vol.45, No.2, pp.17-24,1998.
- [3] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, 2005.
- [4] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 Vol.72, No.7, pp.857-861, 2006.
- [5] 吉田典正, 斎藤隆文, 美しい曲線セグメント, 情報処理学会研究報告 Vol.2005, No.116 (第 121 回グラフィックスと CAD 研究会), pp.97-102, 2005.

- [6] N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.
- [7] W.H. Press et al., Numerical Recipes in C++, Cambridge University press, 2002.

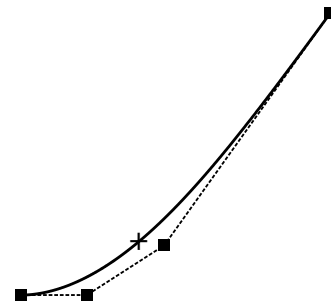


図 1: Compounded-rhythm aesthetic curve,  $\square$ :control point,  $\times$ :joint point

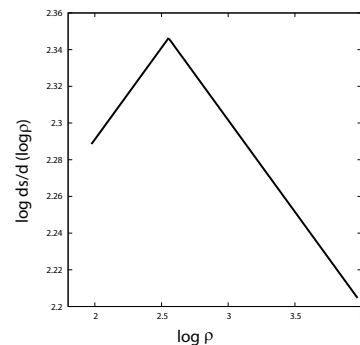


図 2: Logarithmic curvature diagram

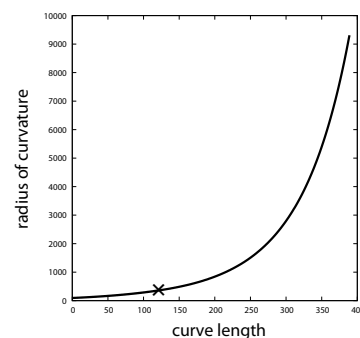


図 3: Radius of curvature v.s. arc length,  $\times$ :joint location