

# 対数型美的平面曲線を用いた曲率を連続とする内挿法

静岡大学 ○三浦憲二郎, 澁谷大, 白杵深

Curvature-continuous Interpolation with the Log-aesthetic Plane Curve

Shizuoka University Kenjiro T. MIURA, Dai SHIBUYA, Shin USUKI

Although the log-aesthetic curves are expressed only by an integral form of the tangent vector, it is possible to interactively generate and deform them and they are expected to be utilized for practical use of industrial and graphical design. In this paper we propose a new method to solve the  $G^2$  Hermite interpolation problem with the log-aesthetic plane curve as well as a method to generate an S-shaped curve for  $G^1$  Hermite interpolation. The methods proposed in the paper have been implemented as a plug-in module for a commercial CAD system and are successfully used for practical design.

## 1. 緒言

対数型美的曲線 (log-aesthetic curve, LA 曲線) は, 対数 (等角) らせん, クロソイド曲線, 円インボリュート曲線, さらに Nielsen のらせんを含むとともに, 接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合であっても対話的な生成, 変形が可能であり, 実務への応用が期待されている [1, 2, 3].

本研究では, 平面曲線に限定して, LA 曲線を用いて両端点の位置とそこでの接線方向, および曲率が指定された曲線を生成する問題の解法, すなわち  $G^2$  エルミート (Hermite) 内挿法を提案する. 両端点の位置とそこでの接線方向を満足する  $G^1$  エルミート内挿法は, Yoshida ら [3] により提案されている. また, 彼らの方法に基づいて, 複数の LA 曲線セグメントからなる曲線を, 接続点での接線方向を変更して曲率を連続にする方法も開発されている [4]. しかしながら, この方法では, セグメント間の接続点での接線方向を指定することができず,  $G^2$  エルミート内挿法ではない.

一方, ロボットの軌道生成のためにクロソイド曲線を用いる方法が提案されている [5, 6, 7, 8]. 特に蘭ら [7] は牧野の方法 [6] を拡張して, クロソイド曲線を用いた  $G^2$  エルミート内挿法を提案している. 単一のクロソイド曲線セグメントでは自由度が不足するため, 彼らの方法では, 3本のセグメントを連結した三連クロソイドを用いて内挿に必要な自由度を確保している.

クロソイド曲線は LA 曲線に含まれており, 曲率対数グラフの傾きを固定すれば, 両者の自由度は等しく, 本研究では, 蘭らの手法に準じて三連 LA 曲線セグメントを用いる. 本論文では, まず LA 曲線の基本式を述べ, 三連 LA 曲線を用いた  $G^2$  エルミート内挿法を提案する.

## 2. 三連対数型美的曲線

蘭らの提案した三連クロソイドによる  $G^2$  補間で用いられた方法に準じて, LA 曲線を 3本連結することで両端点での接線方向と曲率を同時に指定することを可能とする. 本研究では,  $\alpha$  はデザイナーが指定できる定数とし, 形状を定めるための変数とはしない. この条件において, パラメータ数は三連クロソイドによる  $G^2$  エルミート内挿と同数となることに注意する.

### 2.1 三連対数型美的平面曲線の定義

LA 曲線セグメントを 3本連結した三連 LA 曲線において, 以下の議論で各セグメントの曲率対数グラフの傾き  $\alpha$  をそれぞれ異なる値を用いて定式することも可能である. しかしながら, セグメント間の曲率と方向角を連続にする条件式が簡単化することと, 実用上通過点間の曲線に同じ  $\alpha$  値を持たせることは自然

であることから, これらのセグメントの  $\alpha$  値は同一とする. 曲線全長を 1 と仮定し, 三連 LA 平面曲線の曲率  $\kappa(S)$  を正と仮定して以下の各式で定義する. ここで,  $\kappa(S) \geq 0$  と仮定するのは式が不必要に煩雑になることを避けるためであり, 曲率が負となることや曲線が変曲点を持ちその正負が反転してもなんら不都合はない. また,  $\alpha \neq 0, 1$  として定式化する.

$$\kappa(S) = \begin{cases} (c_{10}S + c_{11})^{-\frac{1}{\alpha}} & 0 \leq S \leq S_1 \\ (c_{20}S + c_{21})^{-\frac{1}{\alpha}} & S_1 < S \leq S_2 \\ (c_{30}S + c_{31})^{-\frac{1}{\alpha}} & S_2 < S \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

$S_1, S_2$  をパラメータとすることも可能であるが, 蘭らの手法に従い, 本研究では  $S_1 = 0.25, S_2 = 0.75$  と固定する.

### 2.2 セグメントの条件式

蘭らの手法 [7] と同様に, 曲線の始点を原点とし, 終点を  $x$  軸上に移動させる. 始点と終点での曲率をそれぞれ  $\kappa_s \geq 0, \kappa_e \geq 0$  とし, 方向角を  $\phi_s, \phi_e$  とする. これらの条件は以下のように表される.

$$\kappa_s h = (c_{11})^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (2)$$

$$\kappa_e h = (c_{30} + c_{31})^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3)$$

$$\phi_s = \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{10}} (c_{11})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{12} \quad (4)$$

$$\phi_e = \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{30}} (c_{30} + c_{31})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{32} \quad (5)$$

任意の  $\alpha$  に対して式 (2), (3) は,  $c_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2$ ) に関して線形式に変形できるが, 式 (4), (5) は  $\alpha \neq -1$  のとき非線形であることに注意する.

セグメント間で, 曲率と方向角を連続とする条件は 4 個となる. また, 曲線の終点の座標を  $(r, 0)$  とすると, 以下の 2 式が成り立つ.

$$h \int_0^1 \cos \phi(S) dS = r \quad (6)$$

$$\int_0^1 \sin \phi(S) dS = 0 \quad (7)$$

ここで,  $h$  は曲線長,  $r$  は  $x$  軸方向の長さである.

これまでの定式化において, 変数は  $h, c_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2$ ) であり, それらの個数は 10 である. また, 条件式は, 式 (2)~(5), 式 (6)~(7), および曲率と方向角を連続とする条件の 4 個であり, その個数は 10 であり, 両者は一致する. ただし, 三連クロソイドでない場合は, 式 (4) と (5), および方向角を連続とする条件式が非線形方程式となる.

### 2.3 解法

まず、曲線の全長  $h$  を推定し、式 (7) の左辺を  $c_{30}$  のみで表し、式 (7) を満足するように 2 分法により解を探索する。得られた解を用いて式 (6) より  $h$  を求め、その値を用いて再度式 (7) より  $c_{30}$  を求める。この処理を繰り返すことで  $c_{30}$  の値を求める。

この過程において、数値として与えられた  $c_{30}$  を用いて、 $c_{10}$  に関する非線形方程式を解くことでその値を求める。したがって、以下の定式化では  $c_{30}$  は数値で与えられていると考える。

式 (2)~(5) より、 $c_{11}$  は定まり、 $c_{12}$  は  $c_{10}$  により、また  $c_{31}$  と  $c_{32}$  は  $c_{30}$  により定まる。方向角を連続とする条件式から、次式が得られる。

$$\frac{1}{c_{10}}(c_{10}S_1 + c_{11})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{\alpha-1}{\alpha}c_{12} + \frac{1}{c_{20}}\{(c_{20}S_2 + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (c_{20}S_1 + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\} - \frac{1}{c_{30}}(c_{30}S_2 + c_{31})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \frac{\alpha-1}{\alpha}c_{32} = 0$$

上式の左辺を  $f(c_{10})$  と定義する。 $c_{12}$ ,  $c_{20}$ ,  $c_{21}$  は  $c_{10}$  の関数であり、 $\partial f(c_{10})/\partial c_{10}$  を数値的に計算することができる。微分が可能なので、非線形方程式  $f(c_{10}) = 0$  の解法として Newton 法のような微分を必要とする方法が利用でき  $c_{10}$  の値を求める。ここで述べた解法では、 $\alpha \neq 0, 1$  を仮定しているが、 $\alpha = 0, 1$  の場合も同様に定式化することができる。

### 2.4 初期値の推定

前節で述べた解法には、 $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値が必要となる。これらの初期値を求めるために、まず曲線長  $S_1$  と  $S_2$  における曲率の値を推定し、それらを用いて  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値を算出する。

三連 LA 曲線の初期形状推定のために、ここでは、5 次 Bézier 曲線<sup>1</sup>を用いる。端点の位置、そこでの接線方向、および曲率を指定しただけでは 5 次 Bézier 曲線は一意に決まらず、それらを満足したからといって  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値を算出するための曲線として適切であるとは限らない。

そこで、三浦らが定義した目的関数 [9] を曲線長  $L$  に依存しないように修正を加え、それを最小化することで初期値推定に適した 5 次 Bézier 曲線を算出する。

$$J_{LAC} = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2} ds / L \quad (8)$$

図 1(a) に、 $\alpha = -0.5$  と指定し、境界条件を指定するために入力に用いた 5 次 Bézier 曲線とその制御点を青色で、最適化後の 5 次 Bézier 曲線とその制御点を青色で示した。最適化後の曲線を用いて  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値を求め、それらから求めた三連 LA 曲線を赤色で描画した。三連 LA 曲線は単一の LA 曲線と異なり式 (8) を最小化しているわけではないが、最適化した 5 次 Bézier 曲線と三連 LA 曲線の形状が類似していることに注意する。

この例では、入力として与えられた Bézier 曲線から得られる  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値は不適切であり、繰り返し計算の過程で曲線長が負となり計算が破綻する。最適化を施した Bézier 曲線を初期値算出に用いた場合には計算が破綻することなく三連 LA 曲線を算出できる。

図 2(a) に最適化された 5 次 Bézier 曲線から計算された初期値に対する前節で定義した関数  $f(c_{10})$  を示す。関数は非線形ではあるが、 $-20 \leq c_{10} \leq 20$  において  $f(c_{10}) = 0$  を満たす解が 1 つしか存在しないことを示している。図 2(b) に三連 LA 曲線の曲率プロファイルを示す。この図からわかるようにセグメント間で曲率は連続となっているが、両端点で指定した曲率が小さく

<sup>1</sup>曲線の両端点で独立に曲率を指定するためには最低 5 次が必要となる。

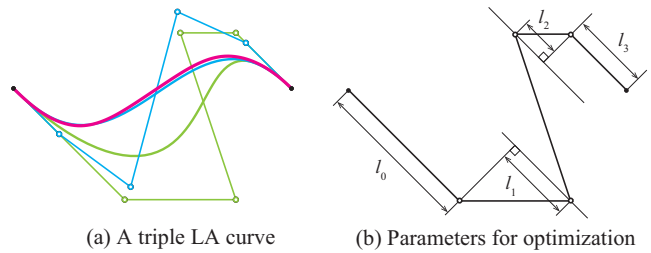


Fig. 1 Optimization of the approximation curve for initial values

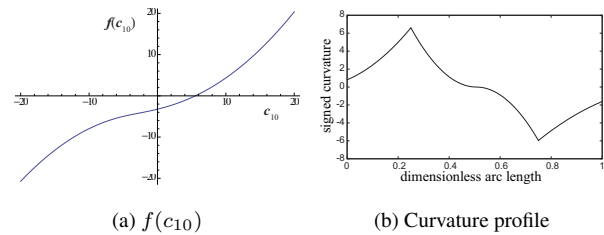


Fig. 2 Nonlinearity of function  $f(c_{10})$  and curvature profile

曲線全体での曲率の単調性は満足されていない。計算時間は、最適化に 30ms、パラメータの算出に 20ms、合計 50ms 要した。

### 3. 結言

本研究では、LA 平面曲線セグメント 3 本を 1 組として用いる  $G^2$  エルミート内挿法を新たに提案した。本研究で提案したアルゴリズムは、市販 CAD システム (McNeel 社製「ライノセラ」) のプラグインとして実装しており、安定して動作している。今後、これらのアルゴリズムを空間曲線へ拡張する。

### 謝辞

本研究の一部は、科学技術振興機構・研究成果最適展開支援事業 (A-STEP) フィージビリティスタディステージ・起業検証タイプの助成を受けて実施した。ここに謝意を表す。また、プラグインの開発では、株式会社エムシースクウェア大野敏則様、北澤弘幸様にいろいろとお世話になりました。感謝いたします。

### 参考文献

- [1] 三浦憲二郎, 藤澤誠, 美的曲線の 3 次元への拡張と B-spline 曲線による近似, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, (2006), 227-232.
- [2] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 **72**, 7, (2006) 857-861.
- [3] N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Pacific Graphics), **22**, 9-11, (2006), 896-905.
- [4] 三浦憲二郎, 八木麻里子, 川田洋平, 藤澤誠, 変曲点を端点とする美的曲線セグメントの入力と  $G^2$  連続性を保証する美的曲線の生成法, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2007 予稿集, (2007) 297-302.
- [5] 仇時雨, 牧野洋, 須田大春, 横山恭男, クロソイドによる自由曲線補間法, 日本ロボット学会誌, **8**, 1, (1990), 680-687.
- [6] 牧野洋, 接線法を用いた自由点列のクロソイド補間, 精密工学会誌, **60**, 1, (1994) 80-85.
- [7] 蘭豊礼, 玉井博文, 牧野洋, 三連クロソイドによる自由点列補間, 精密工学会誌, **76**, 10, (2010) 1194-1199.
- [8] 蘭豊礼, 玉井博文, 三浦憲二郎, 牧野洋, リニアな曲率・振率を持つセグメントによる軌道生成, 精密工学会誌, **78**, 7, (2012) 605-610.
- [9] K.T. Miura, R. Shirahata, S. Agari, S. Usuki, R.U. Gobithaasan, Variational Formulation of the Log-aesthetic Surface and Development of Discrete Surface Filters, Computer-Aided Design and Applications, **9**, 6, (2012) 901-914.