対数型美的曲線の形状算出法の比較

静岡大学　○澁谷大，三浦憲二郎，臼杵深

Comparisons among Numerical Calculations of the Shape of the Log-aesthetic Curve

Shizuoka University　Dai SHIBUYA, Kenjiro T. MIURA, Shin USUK

The log-aesthetic curves, which is defined by a simple relation between its curvature and arc length and can control its curvature distribution, is expected to be used for aesthetic design. However the log-aesthetic curve is generally computed not analytically but numerically. The methods to compute the log-aesthetic curve numerically are either numerical integration or solvers of differential equations, but accuracy and processing times of these methods have not been compared fully so far. In this paper we compare these methods.

1.　緒言

対数型美的曲線は曲率と弧長との簡単な関係から定義される，曲率分布を制御することが可能な曲線である．その見た目の美しさから意匠デザインへの応用が期待されている．しかし，対数型美的曲線は一般的にその形状算出には解析的手法による算出は難しく，数値計算を必要とする．その手法には，大きく分けると平面曲線では数値積分と微分方程式の解法があり，空間曲線では微分方程式のみの解法となる．数値積分法や微分方程式の数値的算出法は様々存在し，それぞれ精度および処理時間に違いがある．そのため，一概にどの手法が最も優れているかは定められない．これまでの対数型美的曲線についての研究では，それらの幾何学的特性や工業利用について言及されてきたが，それらの精度および処理時間について充分に比較されていない．リアルタイムでの曲線の生成において，その精度と生成までの時間は基本的に曲線長と算出する点列の数に影響し，実用上重要である．

そこで，本研究では対数型美的曲線における数値的算出手法の比較を行う．それらを総合し最も優れた手法を明らかにする．

2.　対数型美的曲線

対数型美的曲線とは，その曲率半径の累乗が弧長パラメータに比例する曲線である．以下に平面曲線および空間曲線としての対数型美的曲線について説明する ([1] 参照).

2.1　対数型美的平面曲線

曲率半径 $\rho(s)$ と曲率 $\kappa(s)$ は逆数の関係にある．弧長パラメータ s から，対数型美的曲線の曲率半径は式 (1) で，曲率は式 (2) で表わされる．

$$\rho(s)^{\alpha} = c_0 s + c_1 \tag{1}$$

$$\kappa(s) = \begin{cases} c_0 e^{c_1 s} & \text{if} \quad \alpha = 0 \\ (c_0 s + c_1)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

c_0 と c_1 は定数である．式 (1) を両対数グラフにプロットすると直線を表わし，その傾きが α である．

接線角 $\phi(s)$ は曲率 $\kappa(s)$ を弧長 s で積分することで，式 (3) のように表わされる．

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{c_0}{c_1} e^{c_1 s} + c_2 & \text{if} \quad \alpha = 0 \\ c_0 \log|c_0 s + c_1| + c_2 & \text{if} \quad \alpha = 1 \\ \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_0}(c_0 s + c_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_2 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

また，$c_0 = 0$ の場合は直線または円弧となり，接線角 $\phi(s)$ は式 (4) となる．

$$\phi(s) = c_1^{-\frac{1}{\alpha}} s + c_2 \tag{4}$$

c_2 は定数である．

2.2　対数型美的空間曲線

曲率は式 (2) で与えられる．捩率半径 $\sigma(s)$ およびその逆数である捩率 $\tau(s)$ は弧長パラメータ s から，それぞれ式 (5) と式 (6) で表わされる．

$$\sigma(s)^{\beta} = d_0 s + d_1 \tag{5}$$

$$\tau(s) = \begin{cases} d_0 e^{d_1 s} & \text{if} \quad \beta = 0 \\ (d_0 s + d_1)^{-\frac{1}{\beta}} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

d_0 と d_1 は定数である．

3.　数値解析による対数型美的曲線の生成法

対数型美的曲線は一般に解析的に算出することができない．そこで，フレネ・セレの式から数値的に算出することになる．主に数値積分と微分方程式の解法からの算出の２通りがある ([2] 参照).

3.1　数値積分による算出

曲線 $\boldsymbol{C}(s)$ は接ベクトル $\boldsymbol{u}$ を弧長パラメータ s で積分することで得られる．

$$\boldsymbol{C}(s) = \boldsymbol{C}_0 + \int_0^s \boldsymbol{u}(s) ds \tag{7}$$

$\boldsymbol{C}_0(s)$ は曲線の始点を表わす．また，接ベクトル $\boldsymbol{u}(s)$ は複素平面において，接線角 $\phi(s)$ から以下の式で与えられる．

$$\boldsymbol{u}(s) = e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \tag{8}$$

すなわち，式 (3) および式 (4) より対数型美的曲線を算出できる．

数値積分法の基本的な手法は，まず適当に選んだ n 個の分点 x_i に対する目的関数 $f(x)$ の値から，目的関数を多項式によって補間する．その補間多項式の積分値を各分点 x_i における重み w_i を用いることで求め，その積分値を近似的な積分値とする手法である．

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \tag{9}$$

今回比較した数値積分法は代表的な手法である，分点を等間隔にとる補間多項式が一次関数の台形公式と二次関数のシンプソン公式，また，関数同士の正規直交性の性質を用いる，分点を非等間隔にとり補間多項式の次数をいくらでも大きくすることができるガウス求積法を選んだ．

3.2 微分方程式の数値的解法による算出

微分方程式からの算出は，フレネ - セレの式を用いる．接ベクトル $\boldsymbol{t}_{n+1}$ を更新し，それを曲線の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_n$ に足しこむことで，次の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_{n+1}$ を算出し曲線を生成する．

微分方程式の数値的解法は様々存在し，基本的には目的関数をテイラー展開により近似的に求める．用いるテイラー展開の項の数により精度が変化し，二次精度の改良オイラー法，四次精度のルンゲ - クッタ法，五次精度のルンゲ - クッタ - フェルベルグ法を用いる．

4. 処理速度および誤差比較

処理速度および誤差の比較に使用した計算機は CPU:Core i7-2600, 3.40GHz, 主記憶 8GB を用いた.

Table 1 対数型美的平面曲線の処理時間および誤差比較

(a) パラメータ値

	c_0	c_1	α	l	N
条件 1	2.0	1.0	−1.0	1.0	100
条件 2	0.01	0.5	1.0	1.0	500
条件 3	−0.5	0.3	−1.5	1.0	1000

(b) 各条件における誤差

	比較項目	tra	sim	gq	rk	rkf
条件 1	処理時間 [ms]	0	0	0	0	0
	RMS[10^{-6}]	0.6	0.0	0.0	3155.3	3155.3
	終点誤差 [10^{-6}]	1.4	0.0	0.0	8687.5	8687.5
条件 2	処理時間 [ms]	0	0	0	0	1
	RMS[10^{-6}]	0.7	0.0	0.4	12.4	12.4
	終点誤差 [10^{-6}]	1.4	0.0	1.0	35.3	35.3
条件 3	処理時間 [ms]	1	1	0	1	1
	RMS[10^{-6}]	0.0	0.0	0.0	111.6	111.5
	終点誤差 [10^{-6}]	0.1	0.0	0.1	368.9	368.9

まずは平面曲線に関する比較を以下に記す．比較方法として，処理時間に関してはプログラムの開始から終了までを測定した．その間，プログラムは与えられた条件における曲線の算出のみを行う．また，処理時間は毎回同じ時間とはならないため，１０回計測を行いその平均値を結果とする．誤差に関しては二通りの評価を行った．真値と数値解析手法で算出された値を比較し，対応する各弧長パラメータ s に対する曲線 $\boldsymbol{C}(s)$ の距離の二乗平均誤差 (RMS) を計算するとともに，終点の真値との距離を終点誤差とした．但し，真値は代わりとして分割数が充分に大きいシンプソン公式の値を用いた．比較する数値解析法は台形公式 (tra)，シンプソン公式 (sim)，ガウス求積法 (gq)，ルンゲ - クッタ法 (rk)，ルンゲ - クッタ - フェルベルグ法 (rkf) である．誤差は曲線長 l と点列数 N に依存するが，数値積分法の場合は分点数 n も大きくかかわる．そこで，数値積分法では RMS が 10^{-6} 以下となる最小の刻み幅で比較を行った．形状を定めるパラメータは適当に選び，評価値とともに表 **1** に示す．

処理時間に関してはどれも微小であり，特に差は付かなかった．しかし，誤差に関しては数値積分法を用いは手法はとても精度は良かったが，微分方程式の解法から求めた手法はどちらも精度は良くなかった．特に，条件 2 と条件 3 を比較すると，点列数 N の大きい条件 3 のほうが大きな誤差を生じていた．条件 3 の曲線の形状はＳ字カーブを描いており，接ベクトルの足し合わせで算出する方法では誤差の累積が大きく影響したためと考えられる．また，数値積分法ではシンプソン公式による算出がとても精度よく算出されていた．条件 2 および条件 3 では，どの積分法も分点数が最小で誤差が 10^{-6} 以下であったが，しかし，条件 1 では点列数 N の少いため，台形公式とガウス求積法では分点数を増やしたが，シンプソン公式では分点数は最小でも誤差が 10^{-6} 以下であった．

次に空間曲線における誤差の比較をする．図 **1** に空間曲線の例を示す．処理時間の計測法は平面曲線と同じであるが，空間曲線における真値はルンゲ - クッタ法を十分大きな点列数で算出した値を真値とする．比較する数値解析法は改良オイラー法 (im)，ルンゲ - クッタ法 (rk)，ルンゲ - クッタ - フェルベルグ法 (rkf) である． 処理時間に関しては多少の差はあるが，点列数

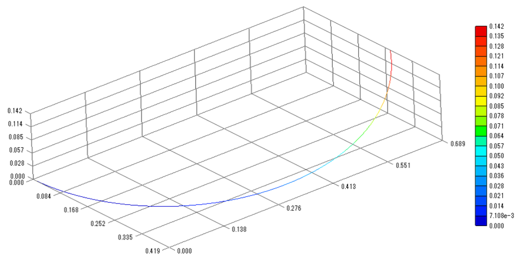

Fig. 1 space curve

Table 2 対数型美的空間曲線の処理時間および誤差比較

(a) パラメータ値

	c_0	c_1	α	d_0	d_1	β	l	N
条件 1	3.0	5.0	−2.0	2.0	4.0	2.0	1.0	1000
条件 2	2.0	0.2	−0.1	2.0	2.0	−2.0	1.0	5000
条件 3	−1.0	0.5	−1.0	2.0	0.7	1.5	1.0	10000

(b) 各条件における誤差

	比較項目	ie	rk	rkf
条件 1	処理時間 [ms]	2	3	4
	RMS[10^{-6}]	532.8	532.5	532.5
	終点誤差 [10^{-6}]	947.6	946.6	946.6
条件 2	処理時間 [ms]	12	18	15
	RMS[10^{-6}]	123.0	63.5	63.7
	終点誤差 [10^{-6}]	689.7	109.5	118.5
条件 3	処理時間 [ms]	25	30	36
	RMS[10^{-6}]	4.4	4.4	4.4
	終点誤差 [10^{-6}]	3.0	3.0	3.0

$N = 10000$ の場合でも最大で 36[ms] しかかからず，許容範囲内といえる．誤差に関しては基本的には高次の微分方程式の解法のほうが精度はよかったが，条件 2 ではルンゲ - クッタ法のほうがルンゲ - クッタ - フェルベルグ法よりも精度が良かった．これは例外なものと考えられるが，定かではないため今後さらに数値実験を行う必要がある．今回の結果からはルンゲ - クッタ法が最も良い手法といえる．

5. 結言

本研究では対数型美的曲線における数値的算出手法の比較を行った．平面曲線では数値積分と微分方程式の解法から算出する手法があり，数値積分による算出が処理時間および精度において優れいており，中でもシンプソン公式による生成が安定していた．空間曲線では高次の微分方程式の解法のほうが基本的に精度が良いが，今回の結果を考慮するとルンゲ - クッタ法が処理時間や精度を考慮すると最良と考えられる．

今後の課題としてはルンゲ - クッタ - フェルベルグ法の精度について実験を追加するとともに，ルンゲ - クッタ法を並列化することにより精度を保ちながら計算速度の向上をはかる．

参 考 文 献

[1] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, 2005.

[2] E. クライツィグ. 数値解析. 近藤次郎. 堀監訳．培風館．1988.