

対数型美的流れ

静岡大学 ○三浦憲二郎, 鈴木晶, 白杵深, マレーシア大学 R.U. Gobithaasan

Log-aesthetic Flow

Shizuoka University Kenjiro T. MIURA, Sho SUZUKI, Shin USUKI, University of Malaysia R.U. Gobithaasan

Based on the concept of fairing free-form curves based curvature flow, we propose that of log-aesthetic flow and a new fairing method in order to make discrete curves “log-aesthetic”.

1. 緒言

本研究では、曲率流れ (curvature flow) による自由曲線の平滑化の考え方にしたがって、離散曲線 (点列から構成される自由曲線) を“対数型美的曲線化”する新たな手法として、対数型美的流れ (log-aesthetic flow) の概念を提案し、それを用いて離散曲線を高速に平滑化 (対数型美的曲線化) する手法を提案する。

2. Curvature Flow [2]

時間 t にしたがって変形する、パラメータ p ($0 \leq p \leq 1$) とする平面曲線 $\mathbf{C}(p, t)$ を考える。その全長を時間の関数 t と考え $L(t)$ で表す。したがって、

$$L(t) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right\| dp \quad (1)$$

ここで、 $\|\mathbf{v}\|$ はベクトル \mathbf{v} のノルムを意味する。上式を t で微分する。

$$L'(t) = \int_0^1 \frac{\left\langle \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p}, \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial p \partial t} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right\|} dp \quad (2)$$

ここで、 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ はベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積を意味する。式 (2) に部分積分を施すと、

$$L'(t) = \left[\frac{\left\langle \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p}, \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right\|} \right]_0^1 - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial p} \right\|} \right] \right\rangle dp \quad (3)$$

曲線の両端点は時間に依存せず固定されていると仮定する、すなわち $\partial \mathbf{C}(0, t)/\partial t = \partial \mathbf{C}(1, t)/\partial t = 0$ とすると、

$$L'(t) = - \int_0^{L(t)} \left\langle \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}, \kappa \mathbf{N} \right\rangle ds \quad (4)$$

ここで、 s は曲線長であり、 $ds = \|\partial \mathbf{C}/\partial p\| dp$ と与えられる。また、 κ は曲率、 \mathbf{N} は法線ベクトルであり、 $\kappa \mathbf{N} = \partial^2 \mathbf{C}/\partial s^2$ と定義される。したがって、

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \kappa \mathbf{N} \quad (5)$$

のとき、 $L(t)$ は最も“速く”減少する。この流れを曲率流れ (curvature flow) と呼ぶ。

曲線の全長を L とし、曲線の持つエネルギー $E(t) = \int_0^L \kappa^2 ds$ と定義する。

$$E'(t) = 2 \int_0^L \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial t} ds, \quad (6)$$

したがって、 $E(t)$ は $\partial \kappa/\partial t = -2\kappa$ のとき最も“速く”減少する。この流れは曲率に基いて形状を変形しており、この場合も曲率流れ [3] と呼ぶ。

3. 平滑化処理

Crane et al.[3] が提案したアルゴリズムに基づき平滑化を行う。その処理の流れを表 1 に示す。この表において、 $\langle \rangle$ はユークリッドの内積、 $\langle \rangle$ は関数上の L^2 の内積、 \mathbf{N} は単位法線ベクトル、 f は交点の座標、 $E_c(\kappa)$ は自然の平滑化エネルギー、 \hat{c}_i はグラムシュミット過程後の正規直交基底、 τ はタイムステップ、 \tilde{T} は新しい単位接線を表している。

Table 1 平滑化処理

ステップ	処理	曲線
1	曲率の値を求める	楕円状の点から曲率 κ を計算
2	曲率の微分を求める	$\dot{\kappa} \leftarrow \kappa \times (-2)$
3	グラムシュミットの正規直交化	$\mathbf{G}_{\text{GRAM}} - \mathbf{S}_{\text{SCHMIDT}}\{1, f^x, f^y\}$
4	流れを制約に射影する	$\dot{\kappa} \leftarrow \dot{\kappa} - \sum_i \langle \dot{\kappa}, \hat{c}_i \rangle \hat{c}_i$
5	前進オイラーステップをとる	$\kappa \leftarrow \kappa + \tau \dot{\kappa}$
6	接線の回復	$\tilde{T} \leftarrow \text{INTEGRATE} \kappa$
7	ポアソン方程式を解く	$L\tilde{f} = b$

- Step 1. サンプルとなる閉曲線の軌跡上の点列に対して連続する 3 点を用いて各点における曲率の値を求める。その際、次式によって計算を行う。ただし κ_i は各点での曲率、 θ は連続する接線ベクトルが成す角度、 $l_{i,i+1}$ は 2 点 $i, i+1$ の接線長さである。

$$\kappa_i = \frac{2\theta}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \quad (7)$$

- Step 2. 式中のマイナス記号は曲率の変化する方向を示している。すなわち、曲率が小さくなる方向である。
- Steps 3., 4. 平滑化処理では次式で表される拘束条件が必要となる。ここで、次式における $\dot{\kappa}$ は曲率の時間微分、記号 1 は任意の点で 1 に等しい関数、 f^x, f^y は現在の曲線の x と y の座標の関数を示している。

$$\langle \dot{\kappa}, 1 \rangle = \langle \dot{\kappa}, f^x \rangle = \langle \dot{\kappa}, f^y \rangle = 0 \quad (8)$$

この拘束条件は、対象の閉曲線を 1 周してきたときに、始点と終点が一致することと接線が一致することを満足させる。これらの拘束条件を満たすように正規直交化をした後、 $\dot{\kappa}$ を Hyper plane に射影する。

- Steps 5., 6. 拘束条件を満足した $\dot{\kappa}$ にタイムステップを掛けて対象の曲率に足すことで曲率を更新する。その後、位置 (座標) を求める。
- Step 7. ポアソン方程式を解くことで点列の位置を更新する。ポアソン方程式の役割はプログラムを複数回ループさせて蓄積された誤差を分散させる。

4. Log-aesthetic Flow

4.1 美的空間での曲線長に関する汎関数

$\sigma = \rho^\alpha = cs + d$ を満たす対数型美的曲線の目的関数は以下で与えられる。

$$J(t) = \int_0^L \sqrt{1 + \sigma_s^2} ds \quad (9)$$

したがって、

$$\begin{aligned} J'(t) &= \int_0^L (1 + \sigma_s^2)^{-\frac{1}{2}} \sigma_s \sigma_{st} ds \\ &= \left[(1 + \sigma_s^2)^{-\frac{1}{2}} \sigma_s \sigma_t \right]_0^L - \int_0^L \frac{\sigma_{ss}}{(1 + \sigma_s^2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_t ds \end{aligned} \quad (10)$$

曲線の両端点での曲率は時間に依存せず固定されていると仮定する、すなわち $\sigma_t(0, t) = \sigma_t(L, t) = 0$ とすると

$$J'(t) = - \int_0^L \frac{\sigma_{ss}}{(1 + \sigma_s^2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_t ds \quad (11)$$

したがって、 $J(t)$ は $\sigma_t = \sigma_{ss}/(1 + \sigma_s^2)^{\frac{3}{2}}$ のとき最も“速く”減少する。この流れを距離に基づく対数型美的流れ (distance-based log-aesthetic flow) と呼ぶ。

4.2 美的空間でのエネルギーに関する汎関数

曲線長を最小にする曲線を求める問題は、エネルギーを最小にする曲線を求める問題と同値であることが知られている [4]。エネルギーは次式で与えられる。

$$J_E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (1 + \sigma_s^2) ds \quad (12)$$

上記汎関数の Euler-Lagrange 式は、 $f = 1 + \sigma_s^2$ とおくと、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{d}{ds} \frac{\partial f}{\partial \sigma_s} = \frac{d}{ds} \sigma_s = \sigma_{ss} = 0 \quad (13)$$

$\sigma = \rho^\alpha$ であり、

$$(\alpha - 1)\rho_s^2 - \rho\rho_{ss} = 0 \quad (14)$$

が得られる。これは、式 (9) に対する Euler-Lagrange 式に一致する [1]。

式 (12) より、

$$J'_E(t) = \int_0^L \sigma_s \sigma_{st} ds \quad (15)$$

曲線の両端点での曲率は時間に依存せず固定されていると仮定する、すなわち $\sigma_t(0, t) = \sigma_t(L, t) = 0$ とすると

$$J'_E(t) = - \int_0^L \sigma_{ss} \sigma_t ds \quad (16)$$

したがって、 $J_E(t)$ は $\sigma_t = \sigma_{ss}$ のとき最も“速く”減少する。この流れは式 (11) を近似しており、これをエネルギーに基づく対数型美的流れ (energy-based log-aesthetic flow) と呼ぶ。

4.3 Log-aesthetic Flow による平滑化

式 (16) において、 $\alpha = -1$ とすると、次式が得られる。

$$J'_E(t) = - \int_0^L \kappa_{ss} \kappa_t ds \quad (17)$$

したがって、 $J(t)$ は $\kappa_t = \kappa_{ss}$ のとき最も“速く”減少する。そこで、

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \kappa_{ss} \quad (18)$$

で $\partial \kappa / \partial t$ を更新する。

5. Curvature Flow と Log-aesthetic Flow の比較

図 1 に離散的な点列で定義された楕円を curvature flow と energy-based log-aesthetic flow ($\alpha = -1$) により平滑化した例を示す。curvature flow では log-aesthetic flow に比較してより早く円に近づいていく。最終的には両者ともに円となる。

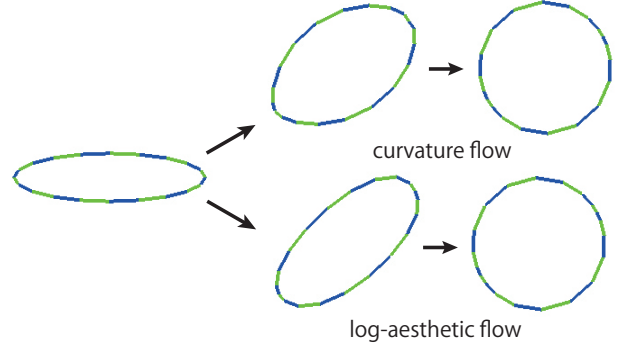


Fig. 1 楕円の平滑化

図 2 により複雑な形状を平滑化した例を示す。この例でも平滑化の過程は大きく異なるが最終的には円に収束する。

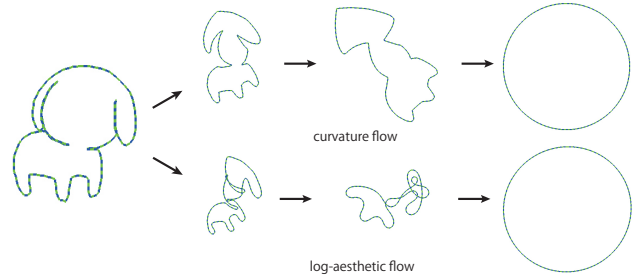


Fig. 2 複雑な図形の平滑化

6. 結言

本研究では、曲率流れによる自由曲線の平滑化の考え方にしたがって、離散曲線を“対数型美的曲線化”する新たな手法として、距離に基づく対数型美的流れとエネルギーに基づく対数型美的流れの概念を提案するとともに、それを用いて離散曲線を高速に平滑化（対数型美的曲線化）する手法を提案した。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費基盤研究 (B)25289021, 挑戦的萌芽研究 26630038, および JST RISTEX 問題解決型サービス科学研究開発プログラムの助成を受けたものである。ここに謝意を表す。

参考文献

- [1] 三浦憲二郎, 白杵深, 変分原理に基づく対数型美的曲線の定式化, 2012 年度精密工学会春季大会学術講演会講演論文集, 2012.
- [2] Satyanad Kichenassamy, Arun Kumar, Peter Oliver, Allen Tannenbaum, Anthony Yezzi, Jr. Conformal Curvature Flows: From Phase Transitions to Active Vision, Arch. rational MEch. Anal. 134(1996)275-301.
- [3] Keenan Crane, Pinkall Ulrich, Peter Schröder, Robust Fairing via Conformal Curvature Flow, ACM Trans. Graph. 32, 4, 2013.
- [4] 深谷賢治, “解析力学と微分形式,” 現代数学への入門, 岩波書店, 2004.