

美しい曲線の一般式

三浦 憲二郎[†]

意匠設計を行うデザイナーにとって、曲線は製品や作品の形状やシルエットを決定するもっとも基本的なデザイン要素であり、それを美しく魅力的にすることは意匠設計の質を高めるために必要不可欠である。原田等は日本刀や自動車のキーラインなどの人工物の美しい曲線だけでなく、鳥の卵や蝶の羽などの自然界に存在する美しい曲線の曲率対数分布図が直線で近似できること、さらにはその直線の傾きと曲線から得られる印象とが強く関連していることを指摘している。

本研究では曲率対数分布図を直線で近似することを意図して解析的に定義するとともに、曲率対数分布図が任意の傾きを持つ直線となる曲線の定式化を提案する。さらに、それらの関係式から曲率半径と曲線長（弧長）との関係を記述する美しい曲線の一般式を導出する。

General Formulas of Aesthetic Curves

KENJIRO T. MIURA[†]

The curve is the most basic design element to determine shapes and silhouettes of industrial products and works for shape designers and it is inevitable for them to make it aesthetic and attractive to improve the total quality of the shape design. Harada et al. insist that natural aesthetic curves like birds' eggs and butterflies' wings as well as artificial ones like Japanese swords and key lines of automobiles have such a property that their curvature logarithmic histograms(LCHs) can be approximated by straight lines and there is a strong correlation between the slopes of the lines and the impressions of the curves.

In this paper, we define the LCH analytically with the aim of approximating it by a straight line and propose new expressions to represent an aesthetic curve whose LCH is given exactly by a straight line. Furthermore we derive general formulas of aesthetic curves that describe the relationship between their radiuses of curvature and lengths.

1. はじめに

意匠設計を行うデザイナーにとって、曲線は製品や作品のシルエットや形状を決定するもっとも基本的なデザイン要素であり、それを美しく魅力的にすることは意匠設計の質を高めるために必要不可欠である。原田等^{1),2)}は、日本刀や自動車のキーラインなどの人工物の美しい曲線だけでなく、鳥の卵や蝶の羽などの自然界に存在する美しい曲線の曲率対数分布図が直線で近似できること、さらにはその直線の傾きと曲線から得られる印象とが強く関連していることを指摘している。ただし、曲率対数分布図の彼らの定義は数学的には厳密でなく、手続き的、数値的な定義となっている。

一方、中野等³⁾は曲率対数分布図の傾きを解析的に定義した。しかしながら、曲率対数分布図がどのような条件で直線に近似できるのか、また近似できる場合

にその直線の傾きはいくつか、については見通しが悪い定義となっている。また、画像等によりその形状が得られた曲線に対しては離散的なデータしか使うことができず、第3章で説明するように原田等が用いた「長さ頻度」のヒストグラムから得られる曲率対数分布図とは縦軸方向にずれた図が得られる。

そこで、本研究では曲率対数分布図を直線で近似することを意図して解析的に定義するとともに、曲率対数分布図が任意の傾きを持つ直線となる曲線の定式化を提案する。さらに、それらの関係式から美しい曲線の一般式を導出する。

2. 曲線の美しさの定量化

ここでは原田等の曲率対数分布図の定義を述べるとともに、彼らの手法の有効性について検証する。定量化手法の対象となる曲線は、1) 平面曲線、2) 曲率が単調に変化する曲線、と仮定している。したがって、直線や円弧など曲率が一定である曲線は解析の対象と

[†] 静岡大学工学部機械工学科
Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University

しない。

2.1 曲率対数分布図

まず、原田等²⁾の提案する方法に従い、曲率対数分布図を作成する。図1(a)のような画像を2値化して曲線上の点を離散的にサンプリングし、図1(b)のようにB-spline曲線で近似し、その曲線から各サンプリング点における曲率半径を推定する。

ここで、全曲線長を S_{all} 、サンプリング点 a_i における曲率半径を ρ_i とする。曲線のサンプリング点 a_i における曲率半径 ρ_i は、曲線上のサンプリング点を等間隔おきに抽出し、各構成点 (a_1, a_2, \dots, a_n) における曲率半径 $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ を算出することにより求める。

例えば、全曲線長を 100mm、抽出間隔を 0.1mm とすると、構成点は 1000 個求まる。次に、曲率半径区間 $\bar{\rho}_j$ を、 ρ_i/S_{all} の取り得る値の範囲、例えば $[0.001, 100]$ の常用対数値 $[-3, 2]$ を 100 等分した区間とする。区間 $\bar{\rho}_j$ が ρ_i/S_{all} のいくつを含むかの数 N_j から、各区間 $\bar{\rho}_j$ が現れる部分曲線長 $s_j (=$ 構成点間距離 $\times N_j)$ を求める。さらに、部分曲線長 s_j の全曲線長 S_{all} に対する比率の対数を表す「長さ頻度」 $\bar{s}_j (= \log_{10}(s_j/S_{all}))$ を算出する。曲率対数分布図は、横軸に $\bar{\rho}_j$ を、縦軸に \bar{s}_j をとることにより図1(c)のように求められる。本研究では曲率対数分布図が直線で近似できる場合、その直線を曲率対数分布直線と呼ぶ。

2.2 「傾き α 」と曲線の印象

図1で示したように、多くの自然物や工芸品の曲線の曲率対数分布図は直線で近似することができる。曲率対数分布直線の「傾き α 」は曲線の印象に大きく関わるとされ、「傾き α 」の符号の変化とその組み合わせに対し図2のような印象が得られることが原田等²⁾により指摘されている。曲率の単調増加といったこれまでに提案された高品位曲線の定量化⁴⁾に比べて、曲線の印象まで考慮され、より定量的な曲線の性質が明らかにされている。

3. 解析的な曲率対数分布図

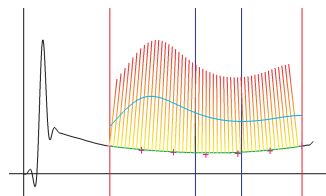
前章で述べた曲率対数分布図は解析的に定義されておらず数学的に厳密には定義されていない。例えば、曲線上の特定の位置、あるいは特定の ρ 値に対する長さ頻度を個別に求めることはできない。そこで、この節では解析的に曲率対数分布図を求めることを考える。

中野等³⁾は曲線 $C(t) = (x(t), y(t))$ に対して、曲

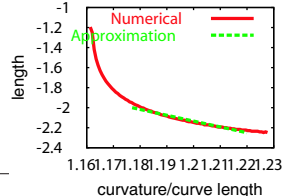
直線や円弧は美しい曲線ではあるが、その美しさは単純な規則性の持つ美しさでありここでは解析の対象としない



(a) 刀剣: 銘 雲生[重要美術品]鎌合時代(13世紀)



(b) B-spline近似



(c) 曲率対数分布図

図1 曲率対数分布図の作成

	「傾き α 」	初等関数の例	印象
単純な曲線	負	サインカーブや3次曲線の一部	「切れがある」「勢いがある」
	0	発見できていない	「安定した」「静かな」
	正	放物線、対数曲線、等角らせん	「線にたまりのある」「求心的な」
複合的な曲線	正→負	サインカーブの一部	発散していた曲線がある境から収束していく
	負→正	発見できていない	収束していた曲線がある境から発散していく

図2 曲率対数分布直線の傾き α とその印象

率半径の対数値を $R = \log \rho$ とし、プライム記号により t についての微分を表すと、

$$\frac{ds}{dR} = \frac{(x'y'' - x''y')(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{3(x'x'' + y'y'')(x'y'' - x''y')} - \frac{1}{(x'^2 + y'^2)(x'y''' - x'''y')} \quad (1)$$

と与えられ、横軸に曲率半径の対数 R 、縦軸に曲率半径の微小変化に対する曲線長の変化量の対数 $\log(ds/dR)$ をとったグラフは曲率対数分布図に数学的に一致すると指摘している。

式(1)は曲率対数分布図の傾きを解析的に定義するという点では十分であるが、曲率対数分布図がどのパラメータ範囲で直線で近似できるのか、またその直線の傾きはいくつか、については式(1)を見ただけではわからない。また、画像等からその形状が取得された曲線については離散的なデータしか使うことができず、長さ頻度を算出するための部分曲線長 s_j は有限の値を用いなければならず、長さ頻度から得られた曲率対数分布図は式(1)より得られる図とは、以下で示すように縦軸方向にずれている。

そこで、式(1)の左辺を変形することを考える。曲率対数分布図の傾きは $\log(ds/d(\log \rho))$ であり、 s, ρ とともにパラメータ t の関数なので、

$$\log \frac{ds}{d(\log \rho)} = \log \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d(\log \rho)}{dt}} = \log \left(\rho \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\rho}{dt}} \right) = \log \rho + \log s_d - \log \frac{d\rho}{dt} \quad (2)$$

ここで、 $s_d = ds/dt$ である。式 (2) は曲率半径やその微分を用いて定義されており、式 (1) に比較して曲率半径と曲線長の変化率との関係が明示的に示されている。

次節では式 (2) を用いて、曲線長の変化量 $\Delta s = (\rho ds/d\rho)\Delta \log \rho$ を有限の値として、その対数値と $\log \rho$ との関係を解析的に求める。説明をよりわかりやすくするために、放物線を例としてその曲率対数分布図を求める。

3.1 放物線

放物線のパラメータ t を x に一致させ、 $C(t=x) = (x, ax^2)$ とする。ただし、 a は正の定数とする。

曲率半径 ρ の対数値 $\log \rho$ の微小変化量 $\Delta \log \rho$ を一定値 c とすると、

$$\Delta s = \frac{ds}{d(\log \rho)} \Delta \log \rho = \frac{ds}{d(\log \rho)} c \quad (3)$$

上式の両辺の対数を取り、式 (2) を用いて整理すると、

$$\log \Delta s = \log \rho + \log s_d - \log \frac{d\rho}{dx} + \log c \quad (4)$$

放物線では、 ρ と s_d は次式で与えられる。

$$\rho = \frac{(1 + 4a^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{2a}, \quad s_d = (1 + 4a^2 x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

したがって、 $d\rho/dx = 6axs_d$ が成り立つことを考慮すると、

$$\log \Delta s = \log \rho - \log 6ax + \log c. \quad (6)$$

式 (5) より、 x を ρ で表すと、

$$x = \frac{1}{2a} \{(2a\rho)^{\frac{2}{3}} - 1\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

上式は、 $(2a\rho)^{2/3} \gg 1$ の場合 $x \approx (2a\rho)^{1/3}/2a$ と近似できるので、式 (6) は、

$$\log \Delta s = \frac{2}{3} \log \rho + C. \quad (8)$$

ただし、 $C = -\log a/3 - \log 2/3 - \log 3 + \log c$ である。よって、曲率対数分布直線の傾きは $2/3$ である。

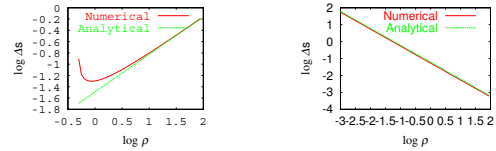
$a = 1$ に対して、2.1 節で述べた方法により数値的に求めた曲率対数分布図と、式 (8) から解析的に得られた直線を図 3(a) に示す。この図から $x \approx 0.778(\log_{10} \rho = 0.5)$ より x が大きければ、式 (8) は曲率対数分布図を良く近似していることがわかる。

この値は原田等²⁾の指摘と一致しているとともに、近似が成り立つための条件 $(2a\rho)^{2/3} \gg 1$ が明らかになった。また、曲率対数分布図が直線であることは、 $\log \Delta s = \alpha \log \rho + C$ より $\Delta s/\rho^\alpha = const$ であり、曲率半径 ρ の α 乗が微小曲線長 Δs に比例することがわかる。

これらで議論により、式 (2) を用いて得られる曲

率対数分布図は、長さ頻度から求めた図とは縦軸方向に $\log c$ だけ平行移動した図となることがわかる。

同様な解析をクロソイド曲線に対して行い、その結果として得られた曲率対数分布図を図 3(b) に示す。この図からもわかるように、クロソイド曲線の曲率対数分布直線の傾きは -1 であり、それが全パラメータ区間にわたって厳密に成り立つ。



(a) 放物線

(b) クロソイド曲線

図 3 曲率対数分布図と曲率対数分布直線

3.2 任意の傾きを持つ曲線

曲線をデザインするためには、曲率対数分布直線の傾きが任意の値をとる曲線を表せることが望ましい。クロソイド曲線の曲率半径が非常に簡単な式で表されることから、クロソイド曲線を拡張することにより任意の傾きを持つ曲線を定式化することを考える。

そこで、クロソイド曲線を Fine Tuning 法⁵⁾を用いて拡張する。Fine Tuning 法は、曲線や曲面の任意の位置の曲率を任意の値に変更する手法であり、与えられた曲線 $C(t)$ に対して、スカラー関数 $g(t) > 0$ を用いて新たな曲線 $C'(t)$ を次式で定義する。

$$C'(t) = P_0 + \int_0^t g(t) \frac{dC(t)}{dt} dt \quad (9)$$

すなわち、Fine Tuning 法は元の曲線を微分し、スカラー関数により 1 次微係数を拡大・縮小することにより曲率の大小を変更する。これをクロソイド曲線に適用する。Fine Tuning されたクロソイド (Fine Tuned Clothoid: FTC) 曲線を次式で複素平面内に定義する。

$$C(t) = \int_0^t g(t) e^{iat^2} dt \quad (10)$$

ここで、 i は虚数単位、 a は正定数、 $g(t)$ は正の値を持つ任意のスカラー関数とする。

クロソイド曲線の曲率半径の値を制御することを考え、クロソイド曲線の曲率半径 ρ_c を用いて $g(t) = \rho_c^\beta = (1/2at)^\beta$ とする。これは、 β の値の範囲として正負を考えれば、定数係数を除けば $g(t)$ は t の $-\beta$ 乗を考えていることと等価である。解析の結果として、

$$\log \Delta s = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \log \rho + C \quad (11)$$

が得られる。ただし、 $C = -\log(\beta + 1) - \log 2 - \log a + \log c$ である。したがって、曲率対数分布図は直線となり、その傾きは $(\beta - 1)/(\beta + 1)$ となり、 β の値を変更することにより 1 以外の任意の傾きを持つことができる。図 4 にこの定式化による様々な傾き α を持つ曲線を示す。 $\alpha = -1$ の曲線はクロソイド曲線である。

傾き 1 となる FTC 曲線は、 $\Delta s/\rho = \text{const}$ に基づく微分方程式を解くことで、 $g(t) = c_0 t e^{c_1 t^2}$ 、(c_0, c_1 は定数) により得られる。

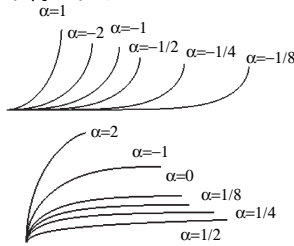


図 4 FTC 曲線とその曲率対数分布曲線の傾き α

4. 美しい曲線の一般式

本章では曲率対数分布図が直線となる曲線の一般式を求める。ここで得られた曲線は美しい曲線を一般的に表す式と考えられ、それを美しい曲線の一般式と呼ぶ。

4.1 一般式の導出

$\Delta \log \rho$ を 0 に近づけた極限を考えると、仮定より式 (2) の左辺に対して、ある定数 α が存在して、

$$\log(\rho \frac{ds}{d\rho}) = \alpha \log \rho + C \quad (12)$$

が成り立つ。ここで C は定数である。この式を美しい曲線の基本方程式と呼ぶ。式 (12) を変形すると、

$$\frac{1}{\rho^{\alpha-1}} \frac{ds}{d\rho} = e^C = C_0 \quad (13)$$

したがって、

$$\frac{ds}{d\rho} = C_0 \rho^{\alpha-1} \quad (14)$$

よって、 $\alpha \neq 0$ であれば、

$$s = \frac{C_0}{\alpha} \rho^\alpha + C_1 \quad (15)$$

上式で C_1 は積分定数である。したがって、

$$\rho^\alpha = C_2 s + C_3 \quad (16)$$

と書ける。ただし、 $C_2 = \alpha/C_0$ 、 $C_3 = -(C_1\alpha)/C_0$ である。定数 C_2, C_3 をそれぞれ新たに c_0, c_1 とすると、

$$\rho^\alpha = c_0 s + c_1 \quad (17)$$

となる。すなわち、曲率半径 ρ の α 乗が曲線長 s の一次式で与えられる。この式を美しい曲線の第 1 一般式と呼ぶ。

$\alpha = 0$ の場合は、

$$s = C_0 \log \rho + C_1 \quad (18)$$

したがって、

$$\rho = C_2 e^{C_3 s} \quad (19)$$

となる。ただし、 $C_2 = e^{-C_1/C_0}$ 、 $C_3 = 1/C_0$ である。定数 C_2, C_3 をそれぞれ新たに c_0, c_1 とすると、

$$\rho = c_0 e^{c_1 s} \quad (20)$$

となる。すなわち、曲率半径 ρ は曲線長の指数関数で与えられる。この式を美しい曲線の第 2 一般式と呼ぶ。

クロソイド曲線は美しい曲線の 1 つとされ⁷⁾、その曲率が曲線長に比例すること、すなわち曲率半径が曲線長に反比例することはクロソイド曲線の基本的な性質である。美しい曲線の基本方程式 (12) において、クロソイド曲線の曲率対数分布直線の傾きに α を一致させ $\alpha = -1$ とし、 $c_1 = 0$ とすると、曲率半径の逆数、すなわち曲率が曲線長に比例し、クロソイド曲線が美しい曲線の第 1 一般式を満足することがわかる。

4.2 一般式を満たす曲線の定式化

3.2 節では、試行錯誤的に曲率対数分布直線が任意の傾きを持つ曲線を FTC 曲線によって定式化した。この節では、美しい曲線の一般式より曲線を定式化する。

曲線 $C(s)$ が美しい曲線の第 1 一般式 (17) を満足すると仮定すると、

$$\rho(s) = (c_0 s + c_1)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (21)$$

が成り立つ。 s が曲線長であることから、 $|s_d| = 1$ であり (例えば⁶⁾)、以下の 2 式を満たす $\theta(s)$ が存在して、

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (22)$$

したがって、 $\rho(s) = 1/(d\theta/ds)$ であることから、

$$\frac{d\theta}{ds} = (c_0 s + c_1)^\alpha \quad (23)$$

よって、

$$\theta = \frac{(c_0 s + c_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)c_0} + c_2 \quad (24)$$

したがって、曲線は始点を $P_0 = C(0)$ とすると、

$\beta = -1$ の場合、曲線は円弧となる。

曲率半径 ρ の α 乗が微小曲線長 Δs に比例するという局所的な性質が、曲線全体に対しても成り立っていることに注意する。

$$C(s) = P_0 + e^{ic_2} \int_0^s e^{i \frac{(c_0 u + c_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)c_0}} du \quad (25)$$

と与えられる。この式はクロソイド曲線の定義に含まれる e の指数の乗数を 2 から $\alpha + 1$ に拡張した形式 (拡張クロソイド曲線) となっており, FTC 曲線と同じように, 0 を除いて 曲率対数分布直線の傾きを任意の値とすることができる。

第 2 一般式の場合は,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c_0} e^{-c_1 s} \quad (26)$$

$$\theta = -\frac{1}{c_0 c_1} e^{-c_1 s} + c_2 \quad (27)$$

したがって, 曲線は,

$$C(s) = P_0 + e^{ic_2} \int_0^s e^{-\frac{i}{c_0 c_1} e^{-c_1 u}} du \quad (28)$$

と定式化される。

5. 自己アフィン性

原田等¹⁾ は曲率対数分布図が直線となる曲線は自己アフィン性を持つと主張しているが, その証明は数学的に厳密ではなく, 「自己アフィン性を持つ曲線は, 曲線上の 2 箇所の位置で曲線を切り取って, その曲線を縦横比が異なる任意の倍率で拡大 (アフィン変換) したときに元の曲線と一致する性質のことをいう¹⁾」, との記述も誤解を招く。この記述では, 与えられた曲線に対して, 切断箇所にのみ依存したアフィン変換のための 2 行 2 列の定数行列が 1 つ存在するように受け取れるが, 例えば, クロソイド曲線に対してそのような行列が存在しないことは明らかである。そこで, 美しい曲線の一般式を満たす曲線を持つ自己アフィン性を新たに定義する。

まず, 自己アフィン性の特別な場合である自己相似性について述べるとともに, 対数 (等角) らせんが自己相似性を持つことを示す。つぎに, 自己相似性が成り立つことを示した方法と同様の方法を用いて, 美しい曲線の一般式を満たす曲線を持つ自己アフィン性を定義する。

5.1 対数らせんの自己相似性

対数らせんはオウム貝の形状を表す曲線であり, 黄金分割とも密接な関係にあり, 美しい曲線の代表とされている^{8),9)}。自己相似性はフラクタル図形を特徴付ける基本的な性質の 1 つであり¹⁰⁾, 例えばリアス式海岸のように拡大しても元の形とよく似た図形になる

FTC 曲線では $\alpha = 1$ を除く。

多重にループしたクロソイド曲線にアフィン変換を施せば曲線は歪んでしまい, もはやクロソイド曲線とはならない。

ことを自己相似性という。以下では対数らせんが自己相似性を持つことを示す。

3.2 節と同様に, 対数らせんを複素平面内に次式で定義する。

$$C(t) = e^{(a+ib)t}. \quad (t \geq 0) \quad (29)$$

ただし, a, b は定数である。ここで, この曲線の先頭部分を切り取り, パラメータ $t \geq 1$ の曲線 $C'(t)$ を以下のように定義する。

$$C'(t) = C(t+1) \quad (30)$$

$$= e^a e^{ib} C(t) \quad (31)$$

上式からわかるように, 曲線 $C'(t)$ は曲線 $C(t)$ を e^a 倍に拡大し, さらに原点を中心に角度 b だけ左回りに回転した曲線とみなすことができる。したがって, 先頭部分を切り取った曲線をスケールングすることにより元の曲線が得られるので, 対数らせんは自己相似性を持つことがわかる。この例では $t < 1$ の部分を切り取ったが, 任意の先頭部分を切り取っても同様の議論が成り立つことは明らかである。

次節で述べる自己アフィン性との関係を明らかにするために, 対数らせんの曲率半径と曲線長との関係を以下に示す。対数らせん $C(t)$ の曲率半径 $\rho(t)$ と曲線長 $s(t)$ は,

$$\rho(t) = \frac{1}{b} \sqrt{a^2 + b^2} e^{at}, s(t) = \sqrt{a^2 + b^2} (e^{at} - 1)$$

であり, 対数らせんでは,

$$\rho(t) = c_0 s(t) + c_1 \quad (32)$$

が成り立つ。ただし, $c_0 = 1/b, c_1 = -1/(b\sqrt{a^2 + b^2})$ である。よって, $\alpha = 1$ とした美しい曲線の第 1 一般式を満たしている。 $C'(t)$ の曲率 $\rho'(t)$ と曲線長 $s'(t)$ は,

$$\rho'(t) = \frac{e^a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} e^t, s'(t) = e^a \sqrt{a^2 + b^2} (e^{bt} - 1)$$

であり, 曲率が e^a 倍されているとともに, 曲線長も e^a 倍されている。

5.2 美しい曲線の自己アフィン性

自己相似性が自然界のいたるところに存在するのに対して, 自己アフィン性をもつ現象はあまり知られていないが, ある種のブラウン運動は, 時間のスケールを 2 倍, 振幅を $2^{1/2}$ 倍にすると自己相似になる⁸⁾。これは, 時間と振幅にアフィン変換を施すと自己相似性が得られることを意味し, これを自己アフィン性と呼んでいる。ここでは, 美しい曲線の第 1, および第 2 一般式を持つ自己アフィン性について考察する。

曲線が美しい曲線の第 1 一般式 (17) を満足すると仮定すると, ある定数 α に対して,

$$\rho(t)^\alpha = c_0 s(t) + c_1. \quad (33)$$

$s(t)$ は厳密に単調増加関数であれば t の任意の関数により再パラメータ化しても曲線の形状は不変なので、 $s(t) = c_1(e^{\beta t} - 1)/c_0$ と再パラメータ化する。したがって、

$$\rho(t) = c_1^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha} t} \quad (34)$$

前節と同様に、曲線の先端部分を切り取ることを考え、パラメータ t を $t+1$ とすると、

$$\rho(t+1) = c_1^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha} e^{\beta t}} \quad (35)$$

となる。すなわち、先端部分を切り取った曲線の曲率半径は元の曲線を $e^{\beta/\alpha}$ 倍した曲線の曲率半径に一致する。

先端部分を切り取った曲線の曲線長は、

$$s'(t) = s(t+1) - s(t) \quad (36)$$

$$= \frac{c_1}{c_0} e^{\beta} (e^{\beta t} - 1) \quad (37)$$

となる。すなわち、先端部分を切り取った曲線の曲線長は元の曲線を e^β 倍した曲線の曲線長に一致する。

これまでの議論をまとめると、先端部分を切り取った曲線は、元の曲線を主法線方向に曲率半径を $e^{\beta/\alpha}$ 倍に拡大し、接線方向に曲線長を e^β 倍に拡大した曲線に一致する、ということが出来る。これは、曲線上の任意の点において直交する2つの方向、すなわち主法線方向と接線方向に別々に異なる倍率でスケールングすることにより元の曲線が得られることを意味し、これを美しい曲線の自己アフィン性と定義する。

曲線が美しい曲線の第2一般式(20)を満足する場合にも以下のように、より簡潔に自己アフィン性を示すことができる。曲率半径 $\rho(t)$ と曲線長 $s(t)$ について以下の式が成り立つと仮定する。

$$\rho(t) = c_0 e^{c_1 s(t)} \quad (38)$$

$s(t) = t$ によって曲線を再パラメータ化し、パラメータ t を1だけシフトさせ t を $t+1$ とすると、

$$\rho(t+1) = c_0 e^{c_1(t+1)} = c_0 e^{c_1} e^{c_1 t} \quad (39)$$

したがって、先端部を切り取った曲線の曲率半径は元の曲線を e^{c_1} 倍した曲線の曲率半径に一致する。すなわち、曲線長は不変であっても主法線方向には伸縮しており、第1一般式を満たす曲線と同様の自己アフィン性を持っている。

本節で例としてあげたブラウン運動の自己アフィン性では、時間軸と振幅を表す軸に関する固定された座標系におけるアフィン変換による自己相似性であった

のに対して、ここで定義した美しい曲線の持つ自己アフィン性は、パラメータ t により定まる曲線上の任意の点での主法線方向と接線方向による、位置に依存して変化する座標系におけるアフィン変換による自己相似性と考えられる。アフィン変換に用いられる行列は、変化する座標系で表せば一定であるが、曲線全体に対して1つの定数行列が存在するわけではない。

6. おわりに

原田等の主張は、美しい曲線の性質を解析するうえで非常に示唆に富んでおり、本研究では曲率対数分布図を直線で近似することを意図して解析的に定義するとともに、曲率対数分布直線が任意の傾きを持つ曲線を定式化した。また、曲率対数分布図が直線となる曲線の曲率半径と曲線長との関係式を求め、それを美しい曲線の一般式として提案した。さらに、美しい曲線の一般式から得られる変化する座標系に対する一定のアフィン変換による自己相似性を美しい曲線の自己アフィン性と定義した。

今後、FTC 曲線や拡張クロソイド曲線による近似を用いた曲線の系統の自動的な分類や、それらの曲線を用いた CAD システムの開発を検討する。

参考文献

- 1) 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, Vol.42, No.3, pp.33-40, 1995.
- 2) 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol.13, No.3, pp.149-158, 1998.
- 3) 中野雄矢, 金谷一朗, 佐藤宏介, 立体曲率対数分布を用いた意匠曲面の感性的分類, FIT(情報科学フォーラム), J-028, 253-245, 2003.
- 4) 東 正毅, 金子光司, 曲率変化の滑らかな曲線の評価基準と創成法, 精密工学会誌, 55 巻, 1 号, 99-104, 1989.
- 5) Miura, K.T.; Cheng, F.; Wang L.; "Fine Tuning: Curve and Surface Deformation by Scaling Derivatives," Proc. Pacific Graphics 2001, pp.150-159, 2001.
- 6) Farin, G., Curves and Surfaces for CAGD, 5th Ed., Morgan Kaufmann, 2001
- 7) 高梨隆雄, 美的設計方法論, ダヴィッド社, 2002.
- 8) 高木隆司, 形の数理, 朝倉書店, 1992.
- 9) 伏見康治, 安野光雅, 中村義作, 美の幾何学, 中公新書, 1979.
- 10) 高安秀樹, フラクタル, 朝倉書店, 1986.