

# 変曲点を端点とする美的曲線セグメントの入力 と $G^2$ 連続性を保証する美的曲線の生成法

三浦 憲二郎<sup>†</sup> 八木 麻里子<sup>††</sup>  
川田 洋平<sup>†††</sup> 藤澤 誠<sup>†††</sup>

美的曲線は、対数(等角)らせん、クロソイド曲線、さらにインボリュート曲線を含むとともに、接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合であっても対話的な生成、変形が可能であり、実務への応用が期待されている。しかしながら、これまでに提案された3点による美的曲線セグメントの入力法では、曲率が単調に増加、または減少する美的曲線セグメント1本しか入力することができず、曲率が増減し曲率の極値を持つ曲線や曲率の正負が反転する変曲点を持つ曲線を入力することができない。そこで、まず本研究では変曲点を端点とする美的曲線セグメントの入力法を提案する。つぎに、液晶ペンタブレット等で入力された点列からの  $G^2$  連続性を持つ美的曲線の生成法を提案する。

## Input of Aesthetic Curve Segments with Inflection End Points and Generation of Aesthetic Curves with $G^2$ continuity

KENJIRO T. MIURA,<sup>†</sup> MARIKO YAGI,<sup>††</sup> YOHEI KAWATA<sup>†††</sup>  
and MAKOTO FUJISAWA<sup>†††</sup>

The aesthetic curves include the logarithmic (equiangular) spiral, clothoid, and involute curves. Although most of them are expressed only by an integral form of the tangent vector, it is possible to interactively generate and deform them and they are expected to be utilized for practical use of industrial and graphical design. However, their input method proposed so far by use of three so-called control points can generate only an aesthetic curve segment with monotonic curvature variation and can not create a curve with the curvature-extremal point or the inflection point. Hence at first we propose a technique to input an aesthetic curve segment with an inflection point at its end. Then we propose a method to generate an aesthetic curve with  $G^2$  continuity from a sequence of 2D points input with, for example, a liquid crystal pen tablet.

### 1. はじめに

「美しい曲線」は原田<sup>1)</sup>により曲率対数分布図が直線で近似される曲線として提案された。三浦<sup>3),4)</sup>は曲率対数分布図が厳密に直線で与えられる曲線の解析解を求め、それを「美しい曲線の一般式」として提案した。さらに、吉田と齋藤<sup>5)</sup>は「一般式」によって定義される曲線の特徴を解析、分類するとともに、3個の“制御点”により、2つの端点とそこでの接線方向、

および曲率対数分布図の直線の傾き  $\alpha$  を与えることにより対話的に「美しい曲線(美的曲線)セグメント」を生成する手法を提案した。

美的曲線は、対数(等角)らせん( $\alpha = 1$ )、クロソイド曲線( $\alpha = -1$ )、さらにインボリュート曲線( $\alpha = 2$ )を含むとともに、接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合( $\alpha \neq 1, 2$ )であっても対話的な生成、変形が可能であり、実務への応用が期待されている。しかしながら、吉田らの入力法では、曲率が単調に増加、または減少する美的曲線セグメント1本しか入力することができず、曲率が増減し曲率の極値を持つ曲線や曲率の正負が反転する変曲点を持つ曲線を入力することができない。

そこで、本研究では液晶ペンタブレット等で入力された点列に元として、その点列を3次 B-spline 曲線で近似して平滑化するとともに、B-spline 曲線の変曲

<sup>†</sup> 静岡大学創造科学技術大学院  
Graduate School of Science and Technology, Shizuoka University

<sup>††</sup> 静岡大学工学部  
Faculty of Engineering, Shizuoka University

<sup>†††</sup> 静岡大学理工学研究科  
Graduate School of Science and Engineering, Shizuoka University

点と曲率の極値を持つ位置でセグメントに分割する。各セグメントの曲率対数分布図から  $\alpha$  値を決定し、その値を用いて美的曲線に近似して再度平滑化する。ここで美的曲線を入力する方法を提案する。さらに、曲率の極値を持つ位置の個数を限定することで単純化された美的曲線を生成する。吉田らによって提案された美的曲線セグメントの入力に用いている定式化（第2標準形式<sup>5)</sup>）では曲線長  $s$  が 0 のとき、曲率半径が 1 となるように正規化されており、変曲点では曲率半径が  $\infty$  となるためその入力法では変曲点を端点とする美的曲線セグメントを入力することができない。そこで、本研究では変曲点を端点とする美的曲線セグメントに適した定式化を用いて曲線セグメントを入力する方法を提案する。また、美的曲線セグメント間の曲率は一般に不連続となるのでそれらの曲率が連続になるように変形する手法を提案する。

## 2. 変曲点を始点とする美的曲線セグメント

曲線の変曲点では曲率  $\kappa$  が 0 となり、その点を挟んで右曲がりから左曲がり、あるいは左曲がりから右曲がりへと正負を区別した曲率が符号が反転し、曲線のデザインにおいて重要な役割を果たしている。変曲点では曲率半径  $\rho$  が無限大となり、 $\rho$  を用いた曲線の定式化では適切に変曲点を扱うことができない。この章では、吉田らの提案した 3 点による美的曲線セグメントの入力法<sup>5)</sup> について述べるとともに、変曲点を始点とする美的曲線セグメントの入力法について提案する。

### 2.1 美的曲線セグメントの生成

美的曲線を入力する方法として、吉田と斉藤は  $\alpha$  を指定し、曲線の制御点として端点を指定する 2 点と両端点での接線方向を指定する点の計 3 点を入力することにより、美的曲線セグメントを生成する手法を提案した<sup>5)</sup>。美的曲線セグメント入力に用いている定式化では、原点を通過する標準的な位置に置かれた標準形の曲線セグメントの曲線長  $s$ 、曲率半径  $\rho$ 、および接線の方向角  $\theta$  の関係と曲線上の点を求める積分式を導出している。標準形の曲線セグメントは入力された 3 点に両端点と両端点での接線方向が一致するように相似変換される。

### 2.2 変曲点を始点とする美的曲線の定式化

吉田らの研究<sup>5)</sup> が明らかにしたように、曲線長を有限とすると美的曲線セグメントが変曲点を持つための必要十分条件は曲率対数分布図の傾き  $\alpha < 0$  である。

ここでの平滑化は、曲率の変化が規則的であることを意味している。

以下の定式化では  $\alpha < 0$  と仮定する。

複素平面内において、 $s (> 0)$  を曲線長とすると美的曲線の一般式は次式で与えられる<sup>3),4)</sup>。

$$C(s) = P_0 + \int_0^s e^{ib} e^{iat} \frac{\alpha-1}{\alpha} dt \quad (1)$$

ここで、 $P_0$  は始点、 $a, b$  は定数であり、 $e^{ib}$  は始点での接線方向である。上式の標準形として、 $a > 0$  に限定し、原点を始点、実軸の正の方向を原点での接線方向とする曲線を考える。 $a$  を変化させても曲線は相似となることから  $a = 1$  とすると標準形は、

$$C(s) = \int_0^s e^{it} \frac{\alpha-1}{\alpha} dt \quad (2)$$

でなる。この曲線の方向角  $\theta$  は  $\theta = s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$  であり、この曲線の曲率  $\kappa$  は、

$$\kappa = \left| \frac{d^2 C(s)}{ds^2} \right| = \frac{\alpha-1}{\alpha} s^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (3)$$

で与えられる。したがって、任意の負の値  $\alpha$  に対して  $s = 0$  で  $\kappa = 0$  であり始点は変曲点である。 $s$  と  $\theta$  を  $\kappa$  の関数で表すと、

$$s = \frac{(\alpha-1)^\alpha}{\alpha^\alpha} \kappa^{-\alpha}, \quad \theta = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha-1}} \kappa^{1-\alpha} \quad (4)$$

である。また、 $\theta$  を用いて  $\kappa$  を表すと、

$$\kappa = \frac{\alpha-1}{\alpha} \theta^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (5)$$

である。

### 2.3 3点による入力

前節で変曲点を始点とする美的曲線セグメントの標準形の曲線長  $s$ 、方向角  $\theta$ 、および曲率  $\kappa$  の関係を記述した。2.1 節で説明した 3 点による美的曲線セグメントの入力法では、与えられた任意の  $\alpha$  に対して両端点の位置とそこでの接線方向を指定することができた。しかしながら、さらに 1 つの端点を変曲点と指定する場合、そこでの曲率の値を 0 とする拘束条件が増えるため任意の  $\alpha$  を指定することはできない。そこで  $\alpha$  を変数とすることでこれらの条件を満足する美的曲線セグメントを生成する。

前節で述べたように  $\theta = s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$  であり、 $s$  が一定であれば  $\theta$  は  $\alpha$  の増加にともって増加する。また、 $\alpha$  の増加にともない変曲点でないもう 1 つの端点での曲率は増大し曲線長  $s$  も増大する（図 1~3 参照、ただし、これらの図は両端点を固定し  $\alpha$  を変化させた美的曲線セグメントとその方向角  $\theta$ 、曲率  $\kappa$ 、および  $\alpha$  の関係を示している。これらの図の詳細については第 3 章で説明する）。したがって、 $\alpha$  の増減と  $\theta$  の増減が一致するので、吉田らの美的曲線セグメントの入力法における第 2 標準形の  $\Lambda$  の算出と同様に、二分法によ

り高速に  $\alpha$  を算出することができる。

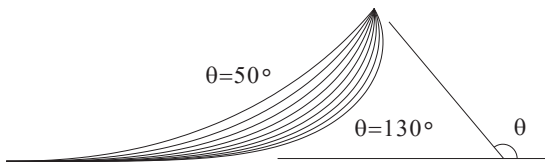


図 1 変曲点を端点として持つ美的曲線セグメント

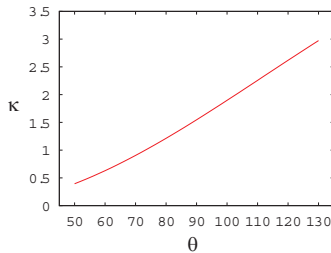


図 2 図 1 に示した曲線群の方向角  $\theta$  に対する曲率  $\kappa$

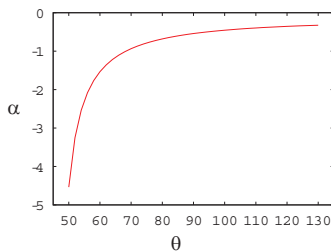


図 3 図 1 に示した曲線群の方向角  $\theta$  に対する傾き  $\alpha$

### 3. 美的曲線生成アルゴリズム

$G^2$  連続である美的曲線を以下のアルゴリズムで生成する。1) ペンタブレット等により点列を入力する。2) 与えられた近似度を満足するように入力された点列から B-Spline 曲線を生成し点列を平滑化する。3) 変曲点と曲率が極値となる位置で B-Spline 曲線をセグメントに分割する。4) 各セグメントに対し、そのセグメントが変曲点を端点としない場合は、その曲率対数分布図を求め、その図を直線で近似することで  $\alpha$  値を算出する。変曲点を持つ場合は  $\alpha$  を変数として端点とそこでの接線方向を満たす  $\alpha$  を算出する。5) 前ステップで求めた  $\alpha$  値を用いて、セグメントの両端点とそこでの接線方向を用いて、各セグメントに対応するさらに平滑化された美的曲線セグメントを生成する。6) 美的曲線セグメント間の曲率は一般に不連続となるのでそれらの曲率が連続になるように変形する。

美的曲線は意匠デザインのための利用を前提としており、可能な限り少ないセグメント数で構成されることが望ましい。曲線を単純化する一手法として、2 つの変曲点の間の曲率の極値を 1 つに限定し、変曲点、曲率の最大値を交互に配置する。ただし、曲率の符号が一定で方向角の変化が大きい場合には、その変化量が一定値 (たとえば  $90^\circ$ ) を越えないようにセグメントを分割する。

#### 3.1 点列の入力と B-Spline 曲線による近似

点列の入力には、たとえば液晶ペンタブレットを使用する。スタイラスペンを用いてディスプレイ上で直接曲線を点列として入力することができ、入力と同時にその曲線を描画することができる。

入力した点列を最小自乗法を利用して代表的なパラメトリック曲線の 1 つである B-Spline 曲線で近似する。曲線の次数は 3、最小自乗法の目的関数は点列と対応する曲線上の点列との距離の 2 乗和とし、必要に応じて端点で、例えば曲率を 0 とする条件等を付加する。セグメント数は 1 から開始し、近似度が低く目的関数の値が指定した閾値より大きい場合は、順次セグメント数を 1 つずつ増加し、閾値より小さい場合に処理を終了する。結果を図 4 に示す。入力した点列を黒色、近似した B-Spline 曲線を灰色、その制御点を + 印で表している。

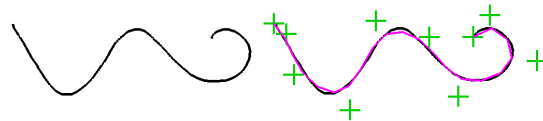


図 4 B-Spline 曲線への近似

#### 3.2 曲率を用いた B-Spline 曲線のセグメント化

吉田らの提案した美的曲線セグメント入力法<sup>5)</sup>を適用するために、生成した B-Spline 曲線を変曲点と曲率の極値ごとに分割する。3 次 B-spline 曲線は各セグメントは 1 本の 3 次 Bézier 曲線と等価であり、ここでは 3 次 Bézier 曲線の変曲点と曲率の極値を求める方法について述べる。

##### 3.2.1 変曲点

3 次 Bézier 曲線を  $C(t) = (x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$  とする。 $x(t)$  と  $y(t)$  の  $t$  による 1 次、2 次微分をそ

定式化では  $\kappa \geq 0$  ( $\rho > 0$ ) と仮定しているが、任意の 3 点による曲線の入力では、標準の位置に対する鏡像が許されており、右曲がり、左曲がり が 区別されるため負の曲率を考慮する。したがって、たとえば変曲点、曲率の極大値 ( $> 0$ )、変曲点、曲率の極小値 ( $< 0$ ) のように配置する。

それぞれ  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$ , および  $\ddot{y}(t)$  と表し,  $f(t) = \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2$ ,  $g(t) = \dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)$  とおくと, 正負を考慮した曲率  $\kappa(t)$  は,

$$\kappa(t) = \frac{g(t)}{f(t)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

で与えられる. 曲線が縮退していなければ  $f(t) \neq 0$  と仮定でき, 曲率が 0 となるパラメータ値は  $g(t) = 0$  を解くことにより得られる.  $g(t)$  は  $t$  の 3 次式であり, 解析的に解を求めることができる.

### 3.2.2 極 値

曲率の極値は  $d\kappa(t)/dt = 0$  を満たすパラメータ値を求めることにより得られる.

$$\frac{d\kappa(t)}{dt} = \frac{2\dot{g}(t)f(t) - 3g(t)\dot{f}(t)}{2f(t)^{\frac{5}{2}}}$$

であり,

$$h(t) = 2\dot{g}(t)f(t) - 3g(t)\dot{f}(t) = 0 \quad (7)$$

を解けば極値をとる  $t$  が求まる.  $f(t)$  が 4 次式であることから  $h(t)$  は 6 次式であり, 数値計算により解を求める. 例えば, 0 から 1 の区間を等分割し, それらの分割した区間の両端点での  $h(t)$  の符号が異なる場合, 区間の中点を初期値として Newton 法によって精度を高める.

図 5 に B-Spline 曲線の各セグメントを 3 次 Bézier 曲線に変換して生成される 3 次 Bézier 曲線の制御点を示す. +印はベジエ曲線の制御点, 灰色の線は各制御点をつないだものである. 図 6 に曲線を変曲点と極値により分割して生成された 3 次 Bézier 曲線を示す.

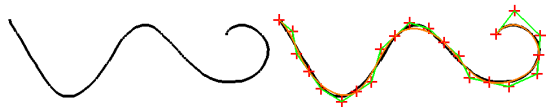


図 5 3 次 Bézier 曲線群への変換



図 6 変曲点, 極値による分割

### 3.3 美的曲線セグメントの生成

変曲点と極値によって分割した 3 次 Bézier 曲線の各々を美的曲線セグメントにより近似する. 吉田らの方法<sup>5)</sup>を適用するために, Bézier 曲線の両端点での接線を求め, それらの交点を算出する. Bézier 曲線より曲率対数分布図のグラフ上の点を離散的に求め, そ

れらを最小自乗法により近似し傾き  $\alpha$  を求める. その値を用いて両端点と交点の計 3 点を用いて美的曲線セグメントを算出する. この方法では各セグメント間で接線は連続でとなるが, 曲率は不連続となる.

#### 3.4 曲率を連続とする変形: 2 本のセグメント間

この節では 2 つの美的曲線セグメント間の曲率を連続にさせる変形法について述べ, 次節で 3 本以上のセグメントからなる美的曲線の変形法について説明する.

図 7 に端点を変曲点とする 2 つの美的曲線セグメントのから構成させる美的曲線を示す. 美的曲線の両端点は変曲点であり, 2 つの曲線セグメントは図で示した制御点 (図中の折れ線の頂点) から生成されている.

美的曲線セグメント生成のために  $\alpha$  を含めてすべてのパラメータを用いているので, 2 つのセグメント間の曲率を連続にするためには, それらのセグメントの制御点の位置を変化させる必要がある. したがって, できるだけ元の形状を維持する方法として, 1) 2 つのセグメントの共通の端点を移動させる, あるいは, 2) 2 つのセグメントの共通の端点での接線方向を変化させる, の 2 つが考えられる. 通常端点の位置はそこでの接線方向よりもデザイン上重要と考えられるので, 本研究では共通の端点での接線方向を変化させる.

美的曲線セグメントは標準形の曲線セグメントに相似変換を施して生成するため, 与えられた制御点の位置から直接解析的に両端点での曲率を求めることはできず, 数値的な手法を用いて相似変換の変換行列を算出しなければその大きさを求めることはできない. しかしながら, 一般的に図 1~3 に示すように, 左曲がり (右曲り) の曲線セグメントでは方向角  $\theta$  に対して端点での曲率  $\kappa$  は単調に増加 (減少) する.

図 1 は  $(0, 0)$  を変曲点,  $(\sqrt{2} + 1, 1)$  をもう 1 つの端点とし, そこでの方向角  $\theta$  を  $50^\circ$  から  $130^\circ$  に変化させて生成した美的曲線セグメント群を示している. 図 2 は  $\theta$  に対する曲率  $\kappa$  を, 図 3 は  $\alpha$  の値をプロットしている. これらの図からわかるように,  $\theta$  の増加に対して  $\kappa$ ,  $\alpha$  ともに増加している. 定性的にこれら 3 つの変数の関係が保たれているならば, 変形前の曲率の差が図 8 のように与えられている場合, 前半の曲線セグメントの曲率が相対的に後半のセグメントの曲率よりも小さいので, 図 7 のように, 共通の端点で左回りに方向角を回転させることにより, 前半のセグメントの曲率を増加させ, 後半の曲率を減少させることができ, ここでも二分法により高速に曲率を一致させる

方向角が  $45^\circ$  であれば 1 番目, 2 番目の制御点間と 2 番目, 3 番目の制御点間の距離は一致し円弧を生成すべきである.

ことができる。

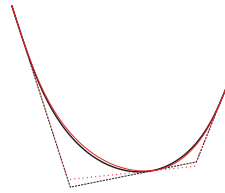


図 7 変曲点を端点とする 2 本の美的曲線セグメント

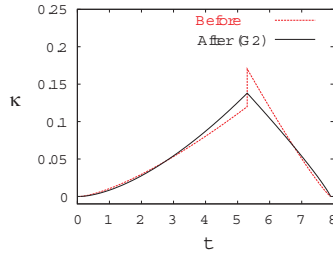


図 8 図 7 の美的曲線の変形前と変形後の曲率

### 3.5 曲率を連続とする変形：曲線全体

前節の説明では端点を変曲点とする美的曲線セグメントを例としており、1 つの端点での曲率は 0 に固定されており、たとえ他のセグメントに接続していても変形による曲率の変化は 2 つのセグメント内に限定されていると考えることができ曲率の連続性に影響を与えない。一般的な美的曲線セグメントでは 1 つの端点での曲率の連続性を保証するための変形は、もう 1 つの端点での曲率の大きさを変化させることになり、そこでの連続性を損なってしまう。

したがって、セグメント間の方位角を変数とし目的関数を各セグメント間の曲率の差の 2 乗とし、Powell 法<sup>2)</sup>のような目的関数の微分を必要としない数値的な最適化手法を用いることが望ましい。しかしながら、一般的に数値的な最適化手法は処理が遅く、さらに目的関数の微分が求められない場合には処理速度は非常に遅くなる。そこで、前節で提案した手法を曲率の差の大きいセグメント間に順次適用し、すべてのセグメント間の曲率の差がある閾値以下に収束したら処理を終える手法を用いる。

この手法の適用結果を図 9 に示す。この図の美的曲線の変形前、変形後の曲率を図 10 に示す。この図が示すようにすべてのセグメント間で曲率が連続となっており  $G^2$  連続性が保障されている。収束時間の解析や方向角の振動を防ぎ収束を高速化するための回転角度の調整については今後の課題とする。

図 11 に図 4 の例から生成した美的曲線を示す。ま

た、図 12 に B-spline 曲線の曲率、変曲点、曲率の極値、さらに美的曲線の曲率を示す。

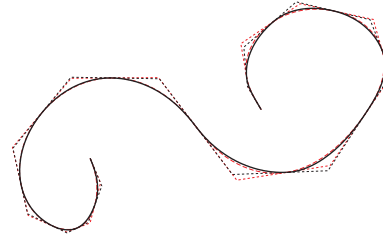


図 9 美的曲線の変形前 (破線) と変形後 (実線)

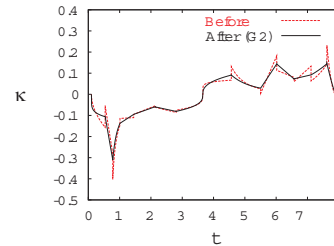


図 10 図 9 の美的曲線の変形前と変形後の曲率



図 11 生成された美的曲線

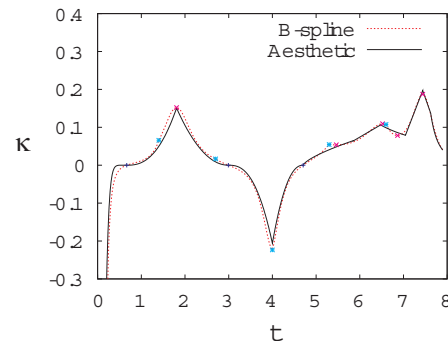


図 12 B-spline 曲線と美的曲線の曲率、変曲点 (+), 曲率の極値 (x), B-Spline セグメントの端点 (\*)

## 4. プログラムの実装と考察

プログラムによって生成された美的曲線を用いて、図 13(a) の写真から (b) のような絵を模写した。曲線は美的曲線を用い、色づけは液晶ペンタブレットに

よって直接描画した．花びらの輪郭の比較を図 13(d) に示す．これらは元の画像の輪郭を抽出した図と手書きで輪郭を描画した曲線を近似する B-spline 曲線，美的曲線を用いて輪郭を描画した図を比較した．自然界に関しては，花びらのしわなどで生じた輪郭の崩れを美的曲線によって美しい輪郭に修正することができた．図 14 に車などの工業デザインを美的曲線により近似した例を示す．これらの図で示したように，自然界や人工物の輪郭を美的曲線を用いることでより美しく近似できた．

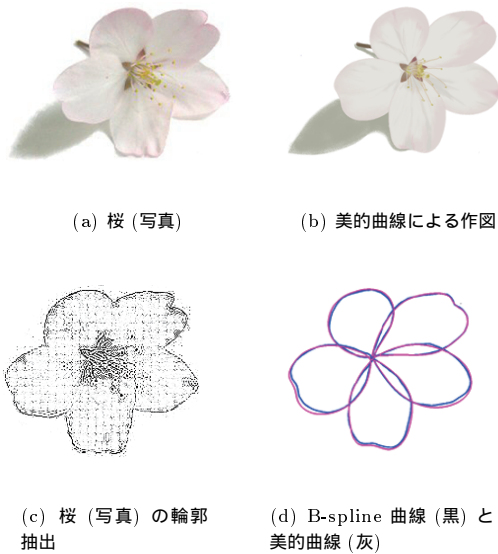


図 13 自然物での比較

## 5. 結 論

本研究では変曲点や曲率の極値を持つ美的曲線を生成するアルゴリズムを提案した．液晶ペンタブレット等で入力された点列に元として，その点列を B-spline 曲線で近似して平滑化するとともに，B-spline 曲線の変曲点と曲率の極値を持つ位置でセグメントに分割する．各セグメントの曲率対数分布図から  $\alpha$  値を決定し，その値を用いて美的曲線に近似して再度平滑化することで美的曲線を入力する方法を提案した．また，端点の変曲点となる場合には  $\alpha$  を変数として端点とそこでの接線方向を満たす曲線を生成した．また，曲率の極値を持つ位置の個数を限定することで単純化された美的曲線を生成した．さらに，美的曲線セグメント間の曲率を連続とする変形法を提案し曲線の  $G^2$  連続性を

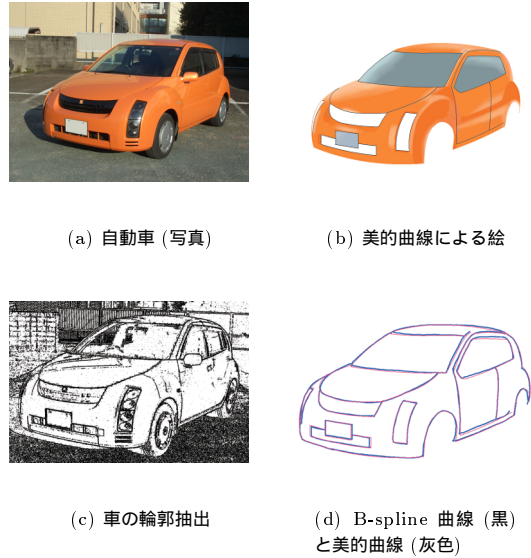


図 14 工業デザインでの比較

保証した．生成された美的曲線は曲率が連続であるとともにセグメントごとに異なる  $\alpha$  値を持つことができ，連続する 2 つのセグメントにおいて曲率が単調に増加，または減少し，さらに前後のセグメントでの  $\alpha$  の符号が異なるならば複合リズム曲線<sup>1)</sup>を生成することもできる．今後，ペンの筆圧や傾き，描画速度の近似への反映をし，美的曲線，さらには曲面をデザインする CAD システムの開発を行う．

## 参 考 文 献

- 1) 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol.13, No.4, pp.149-158,1998.
- 2) W.H. Press et al., Numerical Recipes in C++, Cambridge University press, 2002.
- 3) 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, 2005.
- 4) 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 Vol.72, No.7, pp.857-861, 2006.
- 5) N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.