τ-曲線 -美的曲線への曲率無限大となる点の導入-

静岡大学　○三浦憲二郎，鈴木晶，臼杵深, マレーシア大学　R.U. Gobithaasan

τ-Curve -Introduction of points with infinte curvature-

Shizuoka University　Kenjiro T. MIURA, Sho SUZUKI, Shin USUKI, University of Malaysia　R.U. Gobithaasan

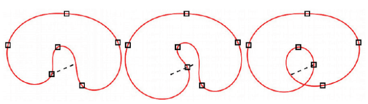
Yan et al. pointed out that one of the demerit of clothoid interpolation is a jumping behavior during the deromation of the curve. This phenomenon can happen because the clothoid curve cannot have a point with infinite curvature. We discuss how to introduce infinite curvature for the log-aesthetic curve including clothoid and propose to use for the representaion of a curve the direction angle insted of curvature and define a new curve named τ-curve, which is defined by the direction angle of the curve.

1.　緒言

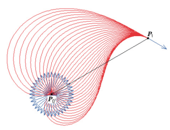
Yan らは通過点を内挿し，かつその点で曲率の最大値を取る 2 次 Bézier 曲線列を κ-曲線として提案した [1]．彼らは対数型美的曲線に含まれるクロソイド曲線の欠点として以下の性質を挙げている．区分クロソイド曲線 (picewise clothoid curve) の制御点を連続的に動かすと，不意に曲線が反転 (flip) する場合が存在する．これは，クロソイド曲線の始点での接線方向を連続的に変化させた場合，始点から曲線が左回りで終点に到達する場合と，逆に右回りに終点に到達する場合が，カタストロフィックに起こるためである．端点での曲率が有限であると，正から負への曲率の変化や，それとは逆に負から正への変化において曲率の値が跳躍するためこの現象を回避することでできない．したがって，この現象を避けるためには端点で曲率が無限大になるように曲線を生成しなければならない．そこで，本研究ではそのような曲線の生成法について検討する．

2.　クロソイド曲線の欠点

図 **1**(a) に示すように，区分クロソイド曲線 (picewise clothoid curve) の制御点を連続的に動かすと，不意に曲線が反転 (flip) する場合が存在する．これは，図 **1**(b) に示すように，クロソイド曲線の始点 $\boldsymbol{P}_0$ での接線方向を連続的に変化させた場合，始点から曲線が左上を回って終点 $\boldsymbol{P}_1$ に到達する場合と，逆に右下を回って終点に到達する場合が，カタストロフィックに起こるためである．



(a) 区分クロソイド曲線の反転



(b) 接線方向の変更

Fig. 1　クロソイド曲線の欠点.

端点での曲率が有限であると，正から負への曲率の変化や，それとは逆に負から正への変化において曲率の値が跳躍するためこの現象を回避することでできない．したがって，この現象を避けるためには端点で曲率が無限大になるように曲線を生成しなければならない．

3.　端点で曲率を無限大にする

曲線の曲率 κ を端点において無限大にすることを考え，曲線長 s の増加に伴い急激に曲率を増加させることを考える．スケーリングにより形状を変えることなく s を変化させることはできるので，$0 \leq s \leq 1$ を仮定する．

そこで，端点で曲率が無限大になるように以下のように曲率を指定する．この曲率は一般化コルニュー曲線 (GCS) の曲率として実現できる．GCS は曲率プロファイルが 1 次有利式で与えられる曲線として定義され，曲線長を s とすると $0 \leq s \leq S$ の区間で曲線は定義され，その曲率 $\kappa(s)$ は次式で与えられる．

$$\kappa(s) = \frac{p+qs}{S+rs}. \tag{1}$$

ここで，$p, q, r > -1$，および $S > 0$ は定数である．そこで，$p/S = m, q = 0, r = -1$ を仮定する．s/S を新たにパラメータとすると，定義域を $0 \leq s \leq 1$ であり，曲率 $\kappa(s)$ は次式で与えられる．

$$\kappa(s) = \frac{m}{1-s} \tag{2}$$

したがって，$s = 0$ での方向角を 0 と仮定すると，方向角 $\theta(s)$ は次式で与えられる．

$$\theta(s) = -m\log(1-s) \tag{3}$$

ここで，$m = 3$ とすると，曲率は図 **2** 左のようにグラフ化される (縦軸の縮尺に注意する)．また，この曲率を持つ曲線を図 **2** 右に示す．端点で無限大を実現することはできたが前例と同様 s の増加に伴い曲線の方向角が急激に増加し，それに伴い曲線はらせん状に伸びていき，形状をうまくコントロールすることができない．

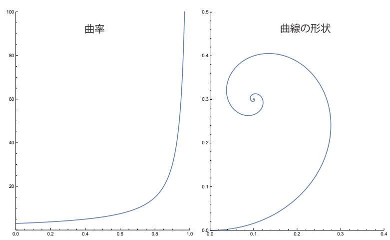
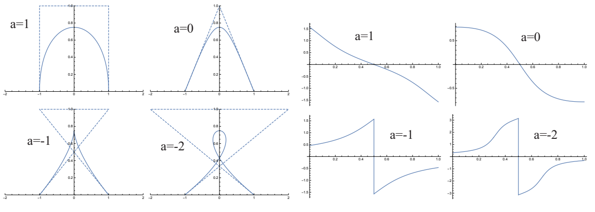


Fig. 2　曲率 $\kappa(s) = \frac{m}{1-s}$.

4.　3 次 Bézier 曲線の曲率無限大となる点

この節では 3 次 Bézier 曲線の曲率無限大の点の性質を解析する．図 **3**(a) のように制御点を配置する．この曲線も $t = 1/2$ の点を通る垂線を対称軸として対称であることに注意する．制御点の座標はそれぞれ $(-1, 0)$, $(-a, 1)$, $(a, 1)$, および $(1, 0)$ とす

る．徐々に a を値を減少させ，曲線を縮退させるとともに，さらに制御点を交差させる．



(a) 3 次 Bézier 曲線　(b) 3 次 Bézier 曲線の方向角

Fig. 3 3 次 Bézier 曲線の曲率無限大となる点.

この 3 次 Bézier 曲線の曲率を $\kappa(t)$ とすると，

$$\kappa(\frac{1}{2}) = -\frac{8}{\sqrt{(a+1)^2(3a+3)}} \tag{4}$$

と与えられ，上式より $a=-1$ のときに曲率が無限大 (負の無限大) となる．これは図 **3**(a) の $a=-1$ の場合に対応しており，$t=1/2$ において尖点 (cusp) を形成しており，曲率が (負の) 無限大であることがわかる．

曲線の方向角 $\theta(t)$ は次式で与えられる．

$$\theta(t) = \arctan(\frac{\Delta y}{\Delta x}) = \arctan(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}) = \arctan(\frac{1-2t}{a}) \tag{5}$$

図 **3**(b) に 3 次 Bézier 曲線の方向角のグラフを示す．$a=-1$ では $t=1/2$ で方向角が 180 度反転し鋸波 (sawtooth wave) 状になる．$a=-2$ の場合も方向角がジャンプしているように見えるが，これは値域の取り方に依存しているだけで方向角そのものは滑らかに変化している．この場合でも方向角を用いると曲率が無限大になる点も自然に扱うことができ，特別な処理を必要としない．したがって，曲線に曲率無限大の点を導入するためには，方向角を不連続に指定すればよく，曲線長 s ではなく方向角 θ を曲線のパラメータとすることが望ましい．

5. σ-曲線

対数型美的曲線 [2] の長所 (曲率の制御性) を保ちながら対称性を持つ新しい曲線として σ-曲線が提案された [3]．Cesàro 方程式を用いて σ 曲線を次式で定義する．

$$\sigma \equiv \rho^\alpha = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{6}$$

上式では，$\sigma(s) = \rho(s)^\alpha$ を曲線長の多項式として与える．n を σ-曲線の次数と呼ぶ．$n=1$ の場合は対数型美的曲線になることに注意する．したがて，この曲線の曲率 $\kappa(s)$ は次式で与えられる．

$$\kappa(s) = (a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{7}$$

上式と $d\theta(s)/ds = \kappa(s)$ の関係より $n=1$ では積分定数を 0 とすると方向角 $\theta_1(s)$ は次式となり，解析的に積分が可能である．

$$\theta_1(s) = \frac{\alpha(a_1 s + a_0)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{(\alpha-1)a_1} \tag{8}$$

6. τ-曲線

これまでの議論で，曲線に曲率無限大となる点を導入するためには方向角 $\theta(s)$ による定式化が望ましいことがわかった．そこで，σ-曲線の定義にしたがって，方向角 $\theta(s)$ の定数 β 乗を曲線長 s の多項式で与える．すなわち，

$$\tau \equiv \theta^\beta = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \tag{9}$$

したがって，

$$\theta = \{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0\}^{\frac{1}{\beta}} \tag{10}$$

本研究では方向角 $\theta(s)$ がこのように与えられる曲線を τ-曲線と呼ぶ．σ-曲線同様，n を τ-曲線の次数と呼ぶ．

$n=1$ の場合, すなわち，

$$\begin{aligned} \{\theta_1(s)\}^\beta &= b_1 s + b_0 \\ \theta_1(s) &= (b_1 s + b_0)^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned} \tag{11}$$

とする．この曲線の曲率は，$\beta \neq 0, 1$ を仮定すると，

$$\kappa_1(s) = \frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{b_1}{\beta}(b_1 s + b_0)^{\frac{1-\beta}{\beta}} = (\frac{b_1^{\frac{1}{1-\beta}}}{\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}}s + \frac{b_1^{\frac{\beta}{1-\beta}}b_0}{\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}})^{\frac{1-\beta}{\beta}} \tag{12}$$

ここで, $a_1 = b_1/\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}, a_0 = b_1^{\frac{\beta}{1-\beta}} b_0/\beta^{\frac{\beta}{1-\beta}}$, さらに $\alpha = \beta/(\beta-1)$ とすると，

$$\kappa_1(s)^{-\alpha} = a_1 s + a_0 \tag{13}$$

となる．$\beta = 0, 1$ の場合も同様に計算できる．したがって，1 次 τ-曲線は対数型美的曲線を表す．

6.1 1 次 τ-曲線の変分原理による定式化

1 次 σ-曲線が美的空間 (s-σ 空間) において直線で与えられたように，1 次 τ-曲線は s-τ 空間において直線で与えられる．

Suzuki ら [4] は，曲線の全長を l とすると対数型美的曲線が最小化している汎関数を次式で定義した．

$$K_{LAC} = \int_0^l (\sigma_s)^2 ds \tag{14}$$

σ を τ に対応させることで次式を得る．

$$\begin{aligned} L_{LAC} &= \int_0^l (\tau_s)^2 ds = \int_0^l (\beta\theta^{\beta-1}\frac{d\theta}{ds})^2 ds \\ &= \int_0^l (\beta\theta^{\beta-1}\kappa)^2 ds \quad = \beta^2 \int_0^l (\theta^{\beta-1}\kappa)^2 ds \end{aligned} \tag{15}$$

$\alpha = \beta/(\beta-1)$ より $\beta = \alpha/(\alpha-1)$ であり，上式は,

$$L_{LAC} = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\int_0^l (\theta^{\frac{1}{\alpha-1}}\kappa)^2 ds \tag{16}$$

係数 $\alpha^2/(\alpha-1)^2$ は α を固定すれば定数で汎関数の大小に影響を与えず不要であり, したがって,

$$L_{LAC} = \int_0^l (\theta^{\frac{1}{\alpha-1}}\kappa)^2 ds \tag{17}$$

を得る．

参　考　文　献

[1] Zhipei Yan, Stephen Schiller, Gregg Wilensky, Nathan Carr, Scott Schaefer, ”κ-Curves: Interpolation at Local Maximum Curvature,” TOG, 36(4), 129, 2017.

[2] Kenjiro T. Miura, R.U. Gobithaasan, ”Aesthetic Design with Log-Aesthetic Curves and Surfaces,” Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, Springer Singapore, pp.107-119, 2016.

[3] Kenjiro T. Miura; Sho Suzuki; Gobithaasan R.U. ; Shin Usuki; Jun-ichi Inoguchi; Masayuki Sato; Kenji Kajiwara; Yasuhiro Shimizu, Fairness Metric Of Plane Curves Defined With Similarity Geometry Invariants, the 2017 International CAD Conference and Exhibition , Okayama, Canada, August 10-12, 2017.

[4] Sho Suzuki, R.U. Gibithaasan, Péter Salvi, Shin Usuki, Kenjiro T. Miura, “Minimum Variation Log-aesthetic Surfaces and Their Applications for Smoothing Free-form Shapes,” Journal of Computational Design and Engineering, 2017, doi:https://doi.org/10.1016/j.jcde.2017.08.003