

変分原理に基づく対数型美的曲線の定式化

静岡大学 ○三浦憲二郎, 臼杵深

A Formulation of the Log-aesthetic Curve Based on Variational Principle

Shizuoka University Kenjiro T. MIURA, Shin USUKI

The log-aesthetic curves include the logarithmic (equiangular) spiral, clothoid, and involute curves. Although most of them are expressed only by an integral form of the tangent vector, it is possible to interactively generate and deform them and they are expected to be utilized for practical use of industrial and graphical design. We reformulate the LA curve with variational principle in order to clarify its properties.

1. 緒言

対数型美的曲線 (log-aesthetic curve) は、対数 (等角) らせん、クロソイド曲線、インボリュート曲線、さらに Nielsen のらせんを含むとともに、接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合であっても対話的な生成、変形が可能であり、実務への応用が期待されている [5, 3, 4, 6].

対数型美的曲線に関する最近の研究として、一般化 Cornu らせんの曲率プロファイルは有理関数で与えられるため、対数型美的曲線を含むとともに、その曲率対数グラフの勾配 (グラフの微分値) は直線となることが報告されている [2]. また、不完全ガンマ関数により対数型美的曲線を解析的に表現する方法が考案されており、これまでの定式化に比較して 10 倍の速度で曲線を生成できることが示された [7].

本研究では、対数型美的曲線の性質を明らかにするために、変分原理に基づいて曲線を再定式化する。

2. 何を最小化しているのか?

平面曲線である対数型美的曲線は曲率対数分布グラフの傾き α が 0 でない場合次式を満足する。

$$\rho^\alpha = cs + d \quad (1)$$

ここで、 ρ は曲率半径、 s は曲線長、 c と d は定数である。また、 $\alpha = 0$ の場合は、

$$\rho = c_0 e^{c_1 s} \quad (2)$$

ここで、 c_0 と c_1 は定数である。また、その曲率対数分布グラフは直線となる。したがって、

$$\log\left(\frac{ds}{d(\log \rho)}\right) = \log\left(\rho \frac{ds}{d\rho}\right) = \alpha \log \rho + C \quad (3)$$

を満たす。これは座標系 $(\log \rho, \log(pds/d\rho))$ の 2 点を結ぶ最短経路として対数型美的曲線が定義されることを意味している。変分原理によれば、次節で示すように 2 点間の最短経路は直線であることが示される。対数型美的曲線は「何を」最小化しているのだろうか?

3. 変分原理 [1]

変分計算では、目的関数である積分量を最小 (あるいは最大) にする問題 (停留積分) を扱う。例えば、

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x) dx \quad (4)$$

とする。 y は x の関数であり、 y_x は y の x に関する導関数である。 y は未知である。 J が停留値を取るための条件式は以下

の偏微分方程式となる。

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0 \quad (5)$$

この式はオイラー方程式と呼ばれる。この式は $dy/dx \neq 0$ であれば以下の式と等価である。

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} (f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x}) = 0 \quad (6)$$

もし $f = f(y, y_x)$ のように x が明示的に現れない問題では、式 (6) は、

$$\frac{d}{dx} (f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x}) = 0 \quad (7)$$

となり、

$$f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} = \text{一定} \quad (8)$$

が得られる。

4. オイラー方程式の応用

オイラー方程式の最も簡単な応用は xy 平面上の 2 点間の最短距離を決める問題である。距離の微小要素は、

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y_x^2} dx \quad (9)$$

であり、距離 J は、

$$J = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^2} dx \quad (10)$$

である。式 (4) と比較すると、

$$f(y, y_x, x) = (1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

式 (8) に代入して、

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y_x^2}} = C \quad (12)$$

ここで、 C は定数である。したがって、定数 a が存在して、

$$y_x = a \quad (13)$$

を満たし、

$$y = ax + b \quad (14)$$

ここで、 b も a 同様定数である。これらの定数 a と b は 2 点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を通るように決定される。

5. 変分原理に基づく対数型美的曲線の定式化

式 (1) において, $\rho^\alpha = \sigma$ と置くと,

$$\sigma = cs + d \quad (15)$$

が得られる. これは, 図 1 に示すように横軸を s とし縦軸を $\sigma = \rho^\alpha$ とする 2 次元空間で, 2 点 (s_1, σ_1) と (s_2, σ_2) を直線を用いて最短で結ぶと, 対数型美的曲線が得られることを示している. このとき,

$$J_{LAC} = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 + \sigma_s^2} ds = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2} ds \quad (16)$$

を最小化している.

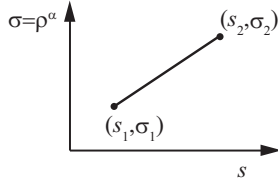


Fig. 1 $s - \sigma$ 平面において 2 点 (s_1, σ_1) と (s_2, σ_2) を結ぶ直線

5.1 パラメータの一般化

曲線は一般的なパラメータ t で与えられるとすると,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt \\ \rho_s &= \frac{\rho_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

であることから, 式 (16) は次式となる.

$$\begin{aligned} J_{LAC} &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \frac{\rho_t^2}{x_t^2 + y_t^2}} \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_t^2} dt \end{aligned} \quad (18)$$

したがって,

$$f(t) = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_t^2} \quad (19)$$

5.2 非線形常微分方程式

式 (16) に対する式 (5) を求める.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{1}{2} (1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2)^{-\frac{1}{2}} \alpha^2 (2\alpha - 2) \rho^{2\alpha-3} \rho_s^2 \\ \frac{\partial f}{\partial \rho_s} &= (1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2)^{-\frac{1}{2}} \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s \end{aligned} \quad (20)$$

さらに,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial f}{\partial \rho_s} &= -\frac{1}{2} (1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2)^{-\frac{3}{2}} (\alpha^2 (2\alpha - 2) \rho^{2\alpha-3} \rho_s^3 \\ &\quad + 2\alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s \rho_{ss}) \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s \\ &\quad + (1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2)^{-\frac{1}{2}} (\alpha^2 (2\alpha - 2) \rho^{2\alpha-3} \rho_s^2 \\ &\quad + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_{ss}) \end{aligned} \quad (21)$$

したがって, 式 (5) は以下となる.

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{d}{ds} \frac{\partial f}{\partial \rho_s} = -\frac{\alpha^2 \rho^{2\alpha-3} ((\alpha - 1) \rho_s^2 + \rho \rho_{ss})}{(1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (22)$$

したがって,

$$(\alpha - 1) \rho_s^2 + \rho \rho_{ss} = 0 \quad (23)$$

対数型美的曲線では, ρ^α は s の 1 次式で与えられるので,

$$\frac{d^2 \rho^\alpha}{ds^2} = \alpha \rho^{\alpha-2} ((\alpha - 1) \rho_s^2 + \rho \rho_{ss}) = 0 \quad (24)$$

したがって,

$$(\alpha - 1) \rho_s^2 + \rho \rho_{ss} = 0 \quad (25)$$

であり, 式 (23) と一致する.

$\rho = 1/\kappa$, $\rho_s = -\kappa_s/\kappa^2$ および $\rho_{ss} = -(\kappa_{ss}\kappa + 2\kappa_s^2)/\kappa^3$ より, 式 (23) は以下のように曲率 κ を用いて表すこともできる.

$$\kappa_{ss} = (\alpha + 1) \frac{\kappa_s^2}{\kappa} \quad (26)$$

5.3 $(\alpha - 1) \rho_s^2 + \rho \rho_{ss} = 0$ の解

式 (23) の解を求める. この式は s を独立変数とする非線形 2 階常微分方程式であるが, s を陽に含まないことから ρ を独立変数, s を従属変数と置き換える. $\rho_s = 1/s_\rho$, $\rho_{ss} = -s_{\rho\rho}/s_\rho^3$ であることから, 式 (23) は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - 1}{s_\rho^2} - \rho \frac{s_{\rho\rho}}{s_\rho^3} &= 0 \\ (\alpha - 1) s_\rho - \rho s_{\rho\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$t = s_\rho$ とおくと,

$$t_\rho = (\alpha - 1) \frac{t}{\rho} \quad (28)$$

この式はアールベールの常微分方程式 ($y'(x) = f(x) + g(x)y(x) + h(x)y(x)^2 + k(x)y(x)^3$) であることに注意する. したがって,

$$t = c_0 r^{\alpha-1} \quad (29)$$

$\alpha \neq 0$ であれば,

$$s = \frac{c_0}{\alpha} \rho^\alpha + c_1 \quad (30)$$

$\alpha = 0$ であれば,

$$s = c_0 \log r + c_1 \quad (31)$$

両者の場合ともに, 対数型美的曲線に一致する.

6. 結言

本研究では, 対数型美的曲線を変分原理を用いて定式化するとともに, オイラー式として与えられる非線形常微分方程式を導き, それを解くことにより, 目的関数として式 (16) が正しいことを明らかにした. 今後, この考え方を曲面に拡張する.

謝辞

本研究の一部は, 科学技術振興機構・研究成果最適展開支援事業 (A - STEP) フィージビリティスタディステージ・起業検証タイプの助成を受けて実施した. ここに謝意を表する.

参考文献

- [1] ジョージ・アルフケン, ハンス・ウェーバー. フーリエ変換と変分原理. 講談社, 2002.
- [2] R.U. Gobithaasan and Kenjiro T. Miura. Aesthetic spiral for design. *Sains Malaysiana*, Vol. 40, No. 11, pp. 1301–1305, 2011.
- [3] K.T. Miura. A general equation of aesthetic curves and its self-affinity. *Computer-Aided Design & Applications*, Vol. 3, No. 1-4, pp. 457–464, 2006.
- [4] K.T. Miura, M. Fujisawa, J. Sone, and K.G. Kobayashi. The aesthetic space curve. In *Proceedings of the Ninth International Conference on Humans and Computers (HC2006)*, pp. 101–106. University of Aizu, 2006.
- [5] K.T. Miura, J. Sone, A. Yamashita, and T. Kaneko. Derivation of a general formula of aesthetic curves. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Humans and Computers (HC2005)*, pp. 166–171. University of Aizu, 2005.
- [6] N. Yoshida and T. Saito. Interactive aesthetic curve segments. *The Visual Computer (Pacific Graphics)*, Vol. 22, No. 9-11, pp. 896–905, 2006.
- [7] Rushan Ziatdinov, Norimasa Yoshida, and Tae wan Kim. Analytic parametric equations of log-aesthetic curves in terms of incomplete gamma functions. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 29, No. 2, pp. 129–140, 2012.