# 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性

静岡大学　○三浦　憲二郎

A General Formula of Aesthetic Curves and Its Self-Affinity

Shizuoka University　Kenjiro T. MIURA

The curve is the most basic design element to determine shapes and silhouettes of industrial products and works for shape designers and it is inevitable for them to make it aesthetic and attractive to improve the total quality of the shape design. If we can formulate the aesthetic curves, it is expected that the quality of the curve design improves drastically because we can use them as standards to generate, evaluate, and deform the curves. In this paper, we discuss the properties of two typical aesthetically beautiful curves: the logarithmic spiral and the clothoid curve and we derive a general formula of aesthetic curves that describes the relationship between their radii of curvature and lengths inclusively expressing these two curves. Furthermore we show the self-affinity possessed by the curves satisfying the general formula of aesthetic curves.

## 1　緒言

意匠設計を行うデザイナにとって，曲線は製品や作品のシルエットや形状を決定するもっとも基本的なデザイン要素であり，それを美しく魅力的にすることは意匠設計の質を高めるために必要不可欠である．美しい曲線を定式化することが可能であれば，CAD 等のデザインツールを開発するうえで，曲線の生成，その品質の評価，あるいは変形等において，標準や規範となる曲線を定義・参照することが可能となり，デザインの質を著しく向上させることが期待できる．

そこで，本研究では美しい曲線の代表例である対数 (等角) らせんとクロソイド曲線の性質について考察し，それらの性質を統一的に表す表現式として美しい曲線の一般式を提案する．さらに，本研究で提案する美しい曲線の曲率対数分布図 [1, 2] が直線で表されること，また，曲線を直交する 2 軸方向に異なる倍率でスケーリングしても，その形状が不変であるという自己アフィン性を持つことを示す．

## 2　美しい曲線の一般式

### 2.1　対数らせん

対数らせんは等角らせんとも呼ばれ，オウム貝の形状を表す曲線としても知られている [3]．ギリシャ・ローマ時代から美しさの源泉とされる黄金分割とも密接な関係にあり，美しい曲線の代表とされている [3, 4, 5]．

その基本的な性質は曲率半径 $\rho$ が弧長 (路長)$s$ に比例することである．より一般的な場合を考え，曲線を任意の位置で切り取ることを考慮すると，曲率半径 $\rho$ が弧長 $s$ の 1 次式で与えられること，すなわち，ある定数 $c_0$ と $c_1$ が存在して，

$$\rho = c_0 s + c_1 \tag{1}$$

と表せる．これは，対数らせんが複素平面内において $a$，$b$ を定数としたとき次式で定義できることから，

$$\boldsymbol{C}(t) = e^{(a+ib)t}. \quad (t \geq 0) \tag{2}$$

対数らせん $\boldsymbol{C}(t)$ の曲率半径 $\rho(t)$ と曲線長 $s(t)$ は，

$$\rho(t) = \frac{1}{b}\sqrt{a^2+b^2}e^{at}, s(t) = \sqrt{a^2+b^2}(e^{at}-1)$$

であり，

$$\rho(t) = c_0 s(t) + c_1 \tag{3}$$

と表せる．ただし，$c_0 = 1/b$，$c_1 = -1/(b\sqrt{a^2+b^2})$ である．

他の性質として対数らせんは自己相似性を有している [3]．自己相似性は美しい図形として知られるフラクタルを特徴付ける基本的な性質の 1 つであり，例えばリアス式海岸のように拡大しても元の形とよく似た図形になることを自己相似性という [6]．

第 4 章で述べる美しい曲線の一般式が持つ自己アフィン性と密接な関係にあるので，対数らせんが自己相似性を持つことを以下に示す．

対数らせんは式 (2) で定義されるが，ここでは，この曲線の先頭部分を切り取ることを考え，パラメータ $t \geq 1$ の曲線 $\boldsymbol{C}'(t)$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}'(t) &= \boldsymbol{C}(t+1) &(4)\\ &= e^a e^{ib}\boldsymbol{C}(t) &(5) \end{aligned}$$

上式からわかるように，曲線 $\boldsymbol{C}'(t)$ は曲線 $\boldsymbol{C}(t)$ を $e^a$ 倍に拡大し，さらに原点を中心に角度 $b$ だけ左回りに回転した曲線とみなすことができる．したがって，先頭部分を切り取った曲線をスケーリングすることにより元の曲線が得られるので，対数らせんは自己相似性を持つことがわかる．この例では $t < 1$ の部分を切り取ったが，任意の先頭部分を切り取っても同様の議論が成り立つことは明らかであろう．

### 2.2　クロソイド曲線

クロソイド曲線はコルニューのらせんとも呼ばれ，対数らせんとともに美しい曲線の 1 つとされている [7]．クロソイド曲線の代表的な性質は弧長に比例して曲率が増加する，すなわち，弧長に曲率半径が反比例することである．

複素平面を用いるとクロソイド曲線は以下のように表せる．

$$\boldsymbol{C}(t) = \int_0^t e^{iat^2}dt \tag{6}$$

ここで，$i$ は虚数であり，$a$ は正の定数である．したがって，その 1 次微分は，

$$\frac{d\boldsymbol{C}(t)}{dt} = e^{iat^2} \tag{7}$$

であり，その絶対値は常に 1 なので，パラメータ $t$ は弧長 $s(t)$ と一致している．したがって，曲率は 2 次微分の絶対値として与えられ，

$$\kappa(t) = \left|\frac{d^2\boldsymbol{C(t)}}{dt^2}\right| = |(2iat)e^{iat^2}| = 2at \tag{8}$$

したがって，ここでも曲線を切り取ることを考慮すると，曲率半径 $\rho(t) = 1/\kappa(t)$ は，

$$\rho(t)^{-1} = c_0 s(t) + c_1 \tag{9}$$

と表せる．

### 2.3　美しい曲線の一般式

式 (3) と式 (9) を比較すると，その両者を包括して表す一般的な式として次式が考えられる．

$$\rho(t)^{\alpha} = c_0 s(t) + c_1 \tag{10}$$

ただし，$\alpha$ は定数とする．この式において，式 (3) は $\alpha = 1$，式 (9) は $\alpha = -1$ の場合である．

式 (10) は 2 つの代表的な美しい曲線，対数らせんとクロソイド曲線を含んで表しており，次章以降に述べる美しい曲線として望ましい性質を持つので，この式を本研究では美しい曲線の一般式と呼ぶ．

## 3　曲線のパラメータ表現とその曲率対数分布図

### 3.1　パラメータ表現

式 (10) は弧長と曲率半径との関係を記述しているにすぎず，その曲線の描画や性質の解析にはあまり適していない．そこで，美しい曲線の一般式を満たす曲線のパラメータ表現を求める．

曲線$\boldsymbol{C}$(s) が美しい曲線の一般式 (10) を満足すると仮定すると，

$$\rho(s) \quad = \quad (c_0 s + c_1)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{11}$$

が成り立つ．$s$ が曲線長であることから，$|d\boldsymbol{C}(s)/ds| = s_d = 1$ であり (例えば [8])，以下の 2 式を満たす $\theta(s)$ が存在して，

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{12}$$

したがって，$\rho(s) = 1/(d\theta/ds)$ であることから，

$$\frac{d\theta}{ds} = (c_0 s + c_1)^{\alpha} \tag{13}$$

よって，

$$\theta = \frac{(c_0 s + c_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)c_0} + c_2 \tag{14}$$

したがって，曲線は始点を $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{C}(0)$ とすると，

$$\boldsymbol{C}(s) = \boldsymbol{P}_0 + e^{ic_2}\int_0^s e^{i\frac{(c_0 u + c_1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)c_0}} du \tag{15}$$

と与えられる．この式はクロソイド曲線の定義式 (6) に含まれる $e$ の指数の乗数を 2 から $\alpha + 1$ に拡張した形式 (拡張クロソイド曲線) となっている．

### 3.2　曲率対数分布図

原田等 [1, 2] は日本刀や自動車のキーラインなど，人工物の美しい曲線だけでなく，鳥の卵や蝶の羽などの自然界に存在する美しい曲線の曲率対数分布図が直線で近似できること，さらにはその直線の傾きと曲線から得られる印象とが強く連関していることを指摘している．

曲率対数分布図の傾きは $\log(ds/d(\log\rho))$ であり，$s$，$\rho$ ともにパラメータ $t$ の関数なので，

$$\begin{aligned}\log\frac{ds}{d(\log\rho)} \quad &= \quad \log\frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d(\log\rho)}{dt}} = \log(\rho\frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\rho}{dt}}) \\ &= \quad \log\rho + \log s_d - \log\frac{d\rho}{dt}\end{aligned} \tag{16}$$

と与えられる [9]．ここで，$t = s$ とすれば，$ds/dt = s_d = 1$ であり，上式は式 (10) を用いて変形すると，

$$\begin{aligned}\log\frac{ds}{d(\log\rho)} \quad &= \quad \log\rho + \log 1 - \log(\frac{c_0}{\alpha}\rho^{1-\alpha}) \\ &= \quad \alpha\log\rho + C\end{aligned} \tag{17}$$

ただし，$C = \log\alpha - \log c_0 + \log 1$ である．したがって，美しい曲線の一般式を満たす曲線の曲率対数分布図は，厳密に傾き $\alpha$ の直線として与えられる．

## 4　美しい曲線の自己アフィン性

自己相似性が自然界のいたるところに存在するのに対して，自己アフィン性をもつ現象はあまり知られていないが，ある種のブラウン運動は，時間のスケールを 2 倍，振幅を $2^{1/2}$ 倍にすると自己相似になる [3]．これは，時間と振幅にアフィン変換を施すと自己相似性が得られることを意味し，これを自己アフィン性と呼んでいる．ここでは，美しい曲線の一般式の持つ自己アフィン性について考察する．

曲線が美しい曲線の一般式 (10) を満足すると仮定すると，ある定数 $\alpha$ に対して，

$$\rho(t)^{\alpha} = c_0 s(t) + c_1. \tag{18}$$

$s(t)$ は厳密に単調増加関数であれば $t$ の任意の関数により再パラメータ化しても曲線の形状は不変なので，$s(t) = c_1(e^{\beta t} - 1)/c_0$ と再パラメータ化する．したがって，

$$\rho(t) = c_1^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha}t} \tag{19}$$

第 2 章と同様に，曲線の先端部分を切り取ることを考え，パラメータ $t$ を $t + 1$ とすると，

$$\rho(t+1) = c_1^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha}t} \tag{20}$$

となる．すなわち，先端部分を切り取った曲線の曲率半径は元の曲線を $e^{\beta/\alpha}$ 倍した曲線の曲率半径に一致する．

先端部分を切り取った曲線の曲線長は,

$$s'(t) \quad = \quad s(t+1) - s(1) \tag{21}$$

$$\quad = \quad \frac{c_1}{c_0}e^{\beta}(e^{\beta t} - 1) \tag{22}$$

となる．すなわち、先端部分を切り取った曲線の曲線長は元の曲線を $e^{\beta}$ 倍した曲線の曲線長に一致する．

これまでの議論をまとめると，先端部分を切り取った曲線は，元の曲線を主法線方向に曲率半径を $e^{\beta/\alpha}$ 倍に拡大し，接線方向に曲線長を $e^{\beta}$ 倍に拡大した曲線に一致する，ということができる．これは，曲線上の任意の点において直交する 2 つの方向，すなわち主法線方向と接線方向に別々に異なる倍率でスケーリングすることにより元の曲線が得られることを意味し，これを美しい曲線の自己アフィン性と定義する．

本章で例としてあげたブラウン運動の自己アフィン性では，時間軸と振幅を表す軸に関する固定された座標系におけるアフィン変換による自己相似性であったのに対して，ここで定義した美しい曲線の持つ自己アフィン性は，パラメータ $t$ により定まる曲線上の任意の点での主法線方向と接線方向による，位置に依存して変化する座標系におけるアフィン変換による自己相似性と考えられる．アフィン変換に用いられる行列は，変化する座標系で表せば一定であるが，曲線全体に対して 1 つの定数行列が存在するわけではない．

## 5　結言

本研究では，対数らせんとクロソイド曲線の性質を検討し，それらの性質を包括的に満足させる一般式を導出し，それを美しい曲線の一般式として提案した．この式で表される曲線の曲率対数分布図は厳密に直線で与えられ，原田等 [1, 2] の主張する美しい曲線を統一的に表現している．美しい曲線の一般式から得られる変化する座標系に対する一定のアフィン変換による自己相似性を美しい曲線の自己アフィン性と定義した．

今後，拡張クロソイド曲線や FTC 曲線 [9] による近似を用いた曲線の系統の自動的な分類や，それらの曲線を用いた CAD システムの開発を検討する．

## 参考文献


[1] 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の物理的性質と自己アフィン性，デザイン学研究, Vol.42, No.3, pp.33-40, 1995.

[2] 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol.13, No.3, pp.149-158, 1998.

[3] 高木隆司, 形の数理, 朝倉書店, 1992.

[4] 伏見康治, 安野光雅, 中村義作, 美の幾何学, 中公新書, 1979.

[5] アルブレヒト・ボイテルスパヒャー, ベルンハルト・ペトリ, 黄金分割 -自然と数理と芸術と-, 共立出版, 2005.

[6] 高安秀樹, フラクタル, 朝倉書店, 1986.

[7] 高梨隆雄, 美的設計方法論, ダヴィッド社, 2002.

[8] Farin, G., Curves and Surfaces for CAGD, 5th Ed., Morgan Kaufmann, 2001.

[9] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, June 16, 17, 2005.