



# 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性\*

三浦 憲 二 郎\*\*

A General Equation of Aesthetic Curves and Its Self-Affinity

Kenjiro T. MIURA

The curve is the most basic design element to determine shapes and silhouettes of industrial products and works for shape designers and it is inevitable for them to make it aesthetic and attractive to improve the total quality of the shape design. If we can find an equation of the aesthetic curves, it is expected that the quality of the curve design improves drastically because we can use them as standards to generate, evaluate, and deform the curves. In this paper, we discuss the properties of two typical aesthetically beautiful curves: the logarithmic spiral and the clothoid curve and we derive a general equation of aesthetic curves that describes the relationship between their radius of curvature and length inclusively expressing these two curves. Furthermore we show the self-affinity possessed by the curves satisfying the general equation of aesthetic curves.

**Key words:** aesthetic curve, general equation of aesthetic curves, self-similarity, self-affinity

## 1. 序 論

意匠設計を行うデザイナーにとって、曲線は製品や作品のシルエットや形状を決定するもっとも基本的なデザイン要素であり、それを美しく魅力的にすることは意匠設計の質を高めるために必要不可欠である。美しい曲線を定式化することが可能であれば、CAD等のデザインツールを開発するうえで、曲線の生成や変形、その品質の評価等において、標準や規範となる曲線を定義・参照することが可能となり、デザインの質を著しく向上させることが期待できる。

そこで、本研究では美しい平面曲線の代表例である対数(等角)らせんとクロソイド曲線の性質について考察し、それらの性質を統一的に表す表現式として美しい曲線の一般式を提案する。本研究ではこの一般式を満たす曲線を「美的曲線」と呼ぶ<sup>1)</sup>。さらに、美的曲線の曲率対数分布図<sup>1)2)</sup>が直線で表されること、また、曲線を接線方向と主法線方向に異なる倍率でスケールしても、その形状が不変であるという自己アフィン性を持つことを示す。

## 2. 美しい曲線の一般式

美しい曲線の代表例として、対数らせんとクロソイド曲線の性質について以下で述べる。さらに、本研究で提案する美しい曲線の一般式の理解を深めるために、一般式に従わない例としてアルキメデスらせんについて論ずる。

### 2.1 対数らせん

対数らせん(logarithmic spiral)は等角らせん(equiangular spiral)、あるいはベルヌーイらせんとも呼ばれ、オウム貝の形状を表す曲線としても知られている<sup>3)</sup>。ギリシャ・ローマ時代から美しさの源泉とされる黄金分割とも密接な関係があり、美しい曲線の代表とされている<sup>3)4)5)</sup>。

\* 原稿受付 平成17年9月30日

\*\* 正 会 員 静岡大学創造科学技術大学院(静岡県浜松市城北3-5-1)

<sup>1)</sup>「美しい」は主観的な日常用語であり、個人の感性に応じて様々な美しい曲線が考えられるので、「美しい曲線」を本研究で提案する一般式で表現される曲線に限定する場合にはそれらの曲線を「美的曲線」と呼ぶこととする。

### 2.1.1 対数らせんの性質

その基本的な性質は曲率半径 $\rho$ が曲線長(弧長, 路長) $s$ に比例することである。より一般的な場合を考え任意の位置で先頭が削除された曲線を表すことを考慮すると、 $\rho$ が $s$ の1次式で与えられる、すなわち、ある定数 $c_0$ と $c_1$ が存在して、

$$\rho = c_0 s + c_1 \quad (1)$$

と表せる。対数らせんは複素平面内において $a, b$ を定数、 $i$ を虚数単位としたとき次式で定義される。

$$C(t) = e^{(a+ib)t}, \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

この曲線の曲率半径 $\rho(t)$ と曲線長 $s(t)$ は、

$$\rho(t) = \frac{1}{b} \sqrt{a^2 + b^2} e^{at}, \quad s(t) = \sqrt{a^2 + b^2} (e^{at} - 1) \quad (3)$$

で与えられるので、

$$\rho(t) = c_0 s(t) + c_1 \quad (4)$$

が得られる。ここで、 $c_0 = 1/b$ 、 $c_1 = \sqrt{a^2 + b^2}/b$ である。図1に対数らせんの例を示す。

### 2.1.2 自己相似性

他の重要な性質として対数らせんは自己相似性を有している<sup>3)</sup>。自己相似性は美しい図形として知られるフラクタルを特徴付ける基本的な性質の1つであり、例えばリアス式海岸のように拡大しても元の形とよく似た図形になることを自己相似性という<sup>6)</sup>。

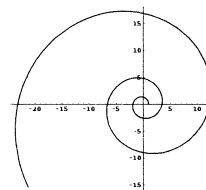


Fig. 1 Logarithmic spiral (a=0.2, b=1)

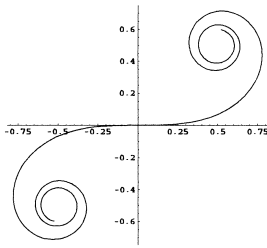


Fig. 2 Clothid curve (a=1)

第4章で述べる美しい曲線の一般式が持つ自己アフィン性と密接な関係にあるので、対数らせんが自己相似性を持つことを以下に示す。

対数らせんは式(2)で定義されるが、ここでは、この曲線の  $0 \leq t < 1$  に対応する先頭部分を削除することを考え、パラメータ  $t \geq 1$  の曲線  $D(t)$  を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} D(t) &= C(t+1) \\ &= e^a e^{ib} C(t) \end{aligned} \quad (5)$$

上式からわかるように、曲線  $D(t)$  は曲線  $C(t)$  を  $e^a$  倍に拡大し、さらに原点を中心に角度  $b$  だけ左回りに回転した曲線とみなすことができる。先頭部分を削除した曲線をスケールリングすることにより元の曲線が得られるので、対数らせんは自己相似性を持つことがわかる。この例では  $t < 1$  の部分を削除したが、任意の先頭部分を削除しても同様の議論が成り立つことは明らかであろう。

### 2.2 クロソイド曲線

クロソイド曲線 (Clothoid curve) はコルニューのらせんとも呼ばれ対数らせんとともに美しい曲線の1つとされている<sup>7)</sup>。

#### 2.2.1 クロソイド曲線の性質

クロソイド曲線の代表的な性質は曲線長に比例して曲率が增加すること、すなわち、曲線長に曲率半径が反比例することである。図2にクロソイド曲線を示す。

複素平面を用いるとクロソイド曲線は以下のように表せる。

$$C(t) = \int_0^t e^{iat^2} dt \quad (6)$$

ここで、 $a$  は正の定数である。1次微分は、

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{iat^2} \quad (7)$$

であり、その絶対値は常に1なので、パラメータ  $t$  は曲線長  $s(t)$  と一致している (例えば文献<sup>8)</sup> を参照)。したがって、曲率は2次微分の絶対値として与えられ、

$$\kappa(t) = \left| \frac{d^2 C(t)}{dt^2} \right| = |(2iat)e^{iat^2}| = 2at \quad (8)$$

ここでも任意の位置で先頭が削除された曲線を表すことを考慮すると、曲率半径  $\rho(t) = 1/\kappa(t)$  は、

$$\rho(t)^{-1} = c_0 s(t) + c_1 \quad (9)$$

と表せる。

#### 2.2.2 自己アフィン性

フラクタル図形に代表されるように自己相似性が自然界のいたるところに存在するのに対して、自己アフィン性をもつ現象はあまり多くは知られていないが、ある種のブラウン運

動は時間のスケールを2倍、振幅を  $2^{1/2}$  倍にすると自己相似になる<sup>3)</sup>。これは時間と振幅にアフィン変換を施すと自己相似性が得られることを意味し、これを自己アフィン性と呼んでいる。ここではクロソイド曲線の持つ自己アフィン性について述べる<sup>2)</sup>。

対数らせんの自己相似性を示した方法と同様に、ここでも先頭部分を削除した曲線を考え、パラメータ  $t \geq 1$  の曲線  $D(t)$  を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} D(t) &= C(t+1) \\ &= \int_0^1 e^{iat^2} dt + \int_1^t e^{iat^2} dt \\ &= P_0 + \int_1^t e^{iat^2} dt \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $D(t)$  の始点を  $P_0 = \int_0^1 e^{iat^2} dt$  とした。  $s(t)$  を  $t$  の任意の単調増加関数により再パラメータ化しても曲線の形状は不変なので、 $\beta$  を正の定数として  $s(t) = c_1(e^{\beta t} - 1)/c_0$  と再パラメータ化する。すると、 $D(t)$  の曲線長  $s_D(t)$  は、

$$\begin{aligned} s_D(t) &= s(t+1) - s(1) \\ &= e^\beta s(t) \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる。したがって、曲線長は元の曲線長の  $e^\beta$  倍に拡大されていることがわかる。

$D(t)$  の曲率半径  $\rho_D(t)$  は式(9)より、

$$\begin{aligned} \rho_D(t)^{-1} &= \rho(t+1)^{-1} \\ &= e^\beta (c_0 s(t) + c_1) \end{aligned} \quad (12)$$

したがって、

$$\rho_D(t) = e^{-\beta} \rho(t) \quad (13)$$

となる。よって、曲率半径は元の曲率半径の  $e^{-\beta}$  倍に縮小されている。

先頭部分を削除したクロソイド曲線は元のクロソイド曲線を主法線方向に曲率半径を  $e^{-\beta}$  倍に縮小し、接線方向に曲線長を  $e^\beta$  倍に拡大した曲線に一致する。これは、曲線上の任意の点において直交する2つの方向、すなわち主法線方向と接線方向に別々に異なる倍率でスケールリングすることにより元の曲線が得られることを意味しており自己アフィン性と呼ぶべき性質である。

美的曲線の自己アフィン性については、第4章でより詳しく述べる。

### 2.3 美しい曲線の一般式

式(4)と式(9)を比較すると、その両者を包括して表す一般式として次式が考えられる。

$$\rho(t)^\alpha = c_0 s(t) + c_1 \quad (14)$$

ただし、 $\alpha$  は0でない定数とする。この式において式(4)は  $\alpha = 1$ 、式(9)は  $\alpha = -1$  の場合に対応する。

式(14)は2つの代表的な美しい曲線、対数らせんとクロソイド曲線を含んで表しており、次章以降に述べる美しい曲線として望ましい性質を持つので、この式を本研究では美しい曲線の一般式と呼ぶ<sup>3)</sup>。

<sup>2)</sup> 曲線の自己アフィン性は高木<sup>3)</sup>の自己アフィン性の定義と厳密には異なることに注意する。第4章において再度曲線の自己アフィン性について論ずる。

<sup>3)</sup>  $c_0 = 0$  の場合に直線 ( $\rho = \infty$ ) と円弧 ( $\rho = \frac{1}{c_1^2}$ ) を含む。



上式は、 $(2a\rho)^{2/3} \gg 1$  の場合  $x \approx (2a\rho)^{1/3}/2a$  と近似できるので、式 (28) は、

$$\log \left| \frac{ds}{d(\log \rho)} \right| = \frac{2}{3} \log \rho + C \quad (30)$$

ただし、 $C = -(\log a + \log 2)/3 - \log 3$  である。よって、曲率対数分布図を近似する直線の傾きは  $2/3$  である。

$a = 1$  に対して、式 (28) から求めた曲率対数分布図と式 (30) で得られた直線を図 4(a) に示す。横軸は  $\log \rho$  であり縦軸は式 (25) の値である。この図から  $x \approx 0.723(\log \rho = 1)$  より  $x$  が大きければ、式 (30) は曲率対数分布図を良く近似していることがわかる。

この直線の傾きの値は原田ら<sup>2)</sup>の指摘と一致しているとともに、近似が成り立つための条件  $(2a\rho)^{2/3} \gg 1$  を明らかにした。

### 3.3.2 対数曲線

放物線と同様、対数曲線のパラメータ  $t$  を  $x$  に一致させ、 $C(t = x) = (x, \log ax)$  とする。ここで、 $y = \log ax = \log a + \log x$  であり、パラメータ  $a$  の変更により曲線は  $y$  座標に関して上下するだけなので  $a = 1$  の場合についてのみ解析する。

対数曲線の  $\rho$  と  $s_d$  は次式で与えられる。

$$\rho = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}, \quad s_d = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} \quad (31)$$

式 (31) の  $\rho$  を  $x$  で微分して、

$$\frac{d\rho}{dx} = 2x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \quad (32)$$

上式を簡単化するために、 $1 - 1/2x^2$  を  $1$  で近似すると、

$$\frac{d\rho}{dx} = 2xs_d \quad (33)$$

さらに、 $\rho \approx x^2$ 、したがって、 $x \approx \rho^{1/2}$  を仮定すると、曲率対数分布図を表す式 (25) は次式となる。

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{ds}{d(\log \rho)} \right| &= \frac{1}{2} \log \rho - \log 2 \\ &= \frac{1}{2} \log \rho + C \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、 $C = -\log 2$  である。よって、曲率対数分布図を近似する直線の傾きは  $1/2$  である。この値も原田ら<sup>2)</sup>の指摘と一致している。対数曲線の曲率対数分布図とその近似直線を図 4(b) に示す。

### 3.4 アルキメデスらせんの曲率対数分布図

式 (25) を用いて描いたアルキメデスらせんの曲率対数分布図を図 5 に示す。曲線の始点では曲率半径の変化が緩慢であり、グラフの縦軸の値は大きくなっているが、急速にその値は

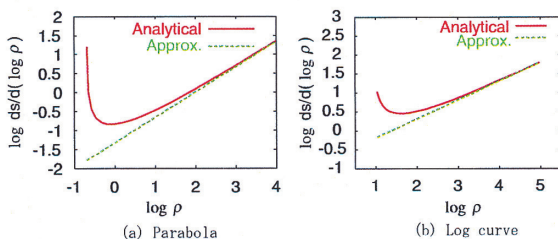


Fig. 4 Logarithmic Curvature Histograms and their approximation lines

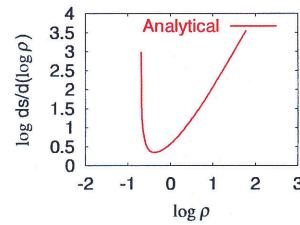


Fig. 5 LCH of an Archimedean spiral (a=1, b=1)

減少し、ある値 ( $\log \rho = -0.4$  付近) をすぎると急速に増加する。式 (15) のパラメータ  $t$  が十分大きくなれば、曲線は円弧に近づきその曲率半径の変化は緩慢となるのでグラフの縦軸の値は再び大きくなる。

アルキメデスらせんはパラメータが大きくなると円弧に近似していくが、アルキメデスらせんの特徴的な形状を示す部位 ( $-0.6 < \log \rho < 1.5$ ) では曲率対数分布図の傾きは大きく変化し、それを適切に直線で近似することは困難である。

### 3.5 Fine Tuning 法による拡張

クロソイド曲線の曲率半径が非常に簡単な式で表されることから、クロソイド曲線を拡張することにより曲率対数分布図が任意の傾きを持つ直線と与えられる曲線を定式化することを考える。そこで、クロソイド曲線を Fine Tuning 法<sup>10)</sup>を用いて拡張する。Fine Tuning 法は、曲線や曲面の任意の位置の曲率を任意の値に変更する手法であり、与えられた曲線  $C(t)$  に対して、スカラー関数  $g(t) > 0$  を用いて新たな曲線  $D(t)$  を次式で定義する。

$$D(t) = P_0 + \int_0^t g(t) \frac{dC(t)}{dt} dt \quad (35)$$

すなわち、Fine Tuning 法は元の曲線を微分し、スカラー関数により 1 次微係数を拡大・縮小することにより曲率の大小を変更する。これをクロソイド曲線に適用する。Fine Tuning されたクロソイド (Fine Tuned Clothoid: FTC) 曲線を次式で複素平面内に定義する。

$$D(t) = \int_0^t g(t) e^{iat^2} dt \quad (36)$$

ここで、 $a$  は正定数、 $g(t)$  は正の値を持つ任意のスカラー関数とする。

クロソイド曲線の曲率半径の値を制御することを考え、クロソイド曲線の曲率半径  $\rho_c$  を用いて  $g(t) = \rho_c^\beta = (1/2at)^\beta$  とする。これは、 $\beta$  の値の範囲として正負を考えれば、定数係数を除けば  $g(t)$  は  $t$  の  $-\beta$  乗を考えていることと等価である。解析の結果として、

$$\log \left| \frac{ds}{d(\log \rho)} \right| = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \log \rho + C \quad (37)$$

が得られる。ただし、 $C = -\log(\beta + 1) - \log 2 - \log a$  である。曲率対数分布図は直線と与えられその傾きは  $(\beta - 1)/(\beta + 1)$  であり、 $\beta$  の値を変更することにより 1 以外の任意の傾きを持たせることができる<sup>6)</sup>。

傾き 1 となる FTC 曲線は、 $ds/d\rho = const$  に基づく微分方程式を解くことで、 $g(t) = c_0 t e^{c_1 t^2}$  ( $c_0, c_1$  は定数) により得られ対数らせんとなる。様々な  $\alpha$  値に対して曲線を生成した例を図 6 に示す。

<sup>6)</sup>  $\beta = -1$  の場合、曲線は円弧となる。



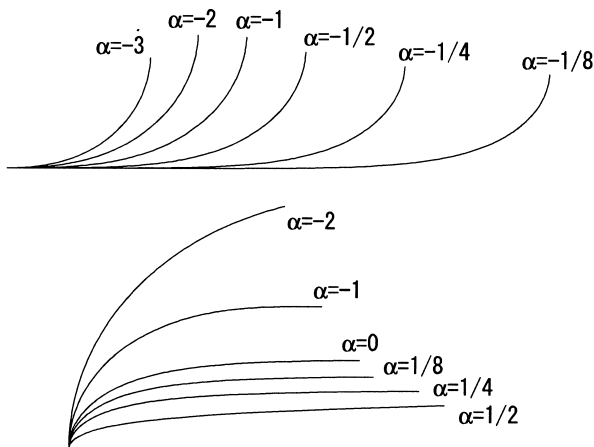


Fig. 6 Fine Tuned Clothoid curves with various  $\alpha$  values

#### 4. 美しい曲線の自己アフィン性

原田ら<sup>1)</sup>は曲率対数分布図が直線となる曲線は自己アフィン性を持つと主張しているが、その証明は数学的に厳密ではなく、「自己アフィン性を持つ曲線は、曲線上の2箇所の位置で曲線を切り取って、その曲線を縦横比が異なる任意の倍率で拡大(アフィン変換)したときに元の曲線と一致する性質のことをいう<sup>1)</sup>」との記述も誤解を招く。この記述では与えられた曲線に対して、切断箇所のみ依存したアフィン変換のための2行2列の定数行列が1つ存在するように受け取れるが、例えばクロソイド曲線に対してそのような行列が存在しないことは明らかである<sup>7)</sup>。そこで、美しい曲線の一般式を満たす曲線を持つ自己アフィン性を新たに定義する。

##### 4.1 一般式を満たす曲線の自己アフィン性

クロソイド曲線が自己アフィン性を持つことを2.2.2項で示した。ここでは、美しい曲線の一般式を持つ自己アフィン性について考察する。

曲線が美しい曲線の一般式(14)を満足すると仮定する。クロソイド曲線の自己アフィン性を示した際と同様に、 $s(t)$ を $t$ の任意の単調増加関数により再パラメータ化しても曲線の形状は不変なので、 $s(t) = c_1(e^{\beta t} - 1)/c_0$ と再パラメータ化する。したがって、

$$\begin{aligned} \rho(t)^\alpha &= c_1 e^{\beta t} \\ \rho(t) &= c_1^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha} t} \end{aligned} \quad (38)$$

ここでも曲線の先頭部分を削除することを考え、パラメータ $t$ を $t+1$ とすると、新しい曲線の曲率半径 $\rho_D(t)$ は、

$$\rho_D(t) = \rho(t+1) = c_1^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha} t} e^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (39)$$

となる。すなわち、先頭部分を削除した曲線の曲率半径は元の曲線を $e^{\beta/\alpha}$ 倍した曲線の曲率半径に一致する。

先頭部分を削除した曲線の曲線長 $s_D(t)$ はクロソイド曲線の場合と同様に、

$$\begin{aligned} s_D(t) &= s(t+1) - s(1) \\ &= \frac{c_1}{c_0} (e^{\beta(t+1)} - 1) - \frac{c_1}{c_0} (e^\beta - 1) \\ &= \frac{c_1}{c_0} e^\beta (e^{\beta t} - 1) \end{aligned} \quad (40)$$

<sup>7)</sup>多重にループしたクロソイド曲線にアフィン変換を施せば曲線は歪んでしまい、もはやクロソイド曲線とはならない。

となる。すなわち、先頭部分を削除した曲線の曲線長は元の曲線を $e^\beta$ 倍した曲線の曲線長に一致する。

#### 4.2 曲線の自己アフィン性

これまでの議論をまとめると、先頭部分を削除した曲線は、元の曲線を主法線方向に曲率半径を $e^{\beta/\alpha}$ 倍に拡大し、接線方向に曲線長を $e^\beta$ 倍に拡大した曲線に一致する、ということが出来る。これは、曲線上の任意の点において直交する2つの方向、すなわち主法線方向と接線方向に別々に異なる倍率でスケールリングすることにより元の曲線が得られることを意味し、これを曲線の自己アフィン性と定義する。クロソイド曲線は美しい曲線の一般式を満足し、この定義において $\alpha = -1$ として自己アフィン性を有していると解釈することができる。

本章で例としてあげたブラウン運動の自己アフィン性では、時間軸と振幅を表す軸に関する固定された座標系におけるアフィン変換による自己相似性であったのに対して、ここで定義した美しい曲線を持つ自己アフィン性は、パラメータ $t$ により定まる曲線上の任意の点での主法線方向と接線方向による、位置に依存して変化する座標系におけるアフィン変換による自己相似性と考えられる。アフィン変換に用いられる行列は、変化する座標系で表せば一定であるが、曲線全体に対して固定された座標系で表される1つの定数行列が存在するわけではない。

#### 5. 結 論

本研究では、対数らせんとクロソイド曲線の性質を検討してそれらの性質を包括的に満足させる一般式を導出し、それを美しい曲線の一般式として提案した。その一般式を満足する美的曲線の曲率対数分布図は厳密に直線で与えられ、原田ら<sup>1,2)</sup>の主張する美しい曲線を $\alpha = 0$ の場合<sup>1)</sup>を除いて統一的に表現している。美しい曲線の一般式から得られる、変化する座標系に対する一定のアフィン変換による自己相似性を曲線の自己アフィン性と定義した。

今後、拡張クロソイド曲線やFTC曲線を用いた近似により曲線の系統の自動的な分類や、それらの曲線を用いたCADシステムの開発を検討する。

#### 謝 辞

本研究の一部は平成15~16年度科学研究費補助金基盤研究(C)(15560117)の助成による。

#### 参 考 文 献

- 1) 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, **42**, 3, (1995) 33.
- 2) 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, **13**, 3, (1998) 149.
- 3) 高木隆司, 形の数理, 朝倉書店, (1992).
- 4) 伏見康治, 安野光雅, 中村義作, 美の幾何学, 中公新書, (1979).
- 5) アルブレヒト・ボイテルスパヒャー, ベルンハルト・ペトリ, 黄金分割-自然と数理と芸術と-, 共立出版, (2005).
- 6) 高安秀樹, フラクタル, 朝倉書店, (1986).
- 7) 高梨隆雄, 美的設計方法論, ダヴィッド社, (2002).
- 8) Farin, G., Curves and Surfaces for CAGD, 5th Ed., Morgan Kaufmann, (2001).
- 9) 中野雄矢, 金谷一朗, 佐藤宏介, 立体曲率対数分布を用いた意匠曲面の感性的分類, FIT(情報科学フォーラム), J-028, (2003) 253.
- 10) Miura, K.T.; Cheng, F.; Wang L.; "Fine Tuning: Curve and Surface Deformation by Scaling Derivatives," Proc. Pacific Graphics 2001, (2001) 150.
- 11) 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスとCAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, (2005) 227.