美的曲線群を利用した自由曲面の生成法

静岡大学大学院　○川田洋平　　上利真一　　藤澤誠　　三浦憲二郎

Generation of Free-form Surfaces based on a Set of Aesthetic Curves

Grad. Sch., Shizuoka Univ.　Yohei KAWATA　Shin-ichi AGARI　Makoto FUJISAWA　Kenjiro T. MIURA

The aesthetic curves include the logarithmic (equiangular) spiral, clothoid, and involute curves. Although most of them are expressed only by an integral form of the tangent vector, it is possible to interactively generate and deform them and they are expected to be utilized for practical use of industrial and graphical design. However, no free-form surface based on the aesthetic curve has not been proposed so far. In this paper, as a first step to establish the aesthetic surface formulation, we propose a method to generate a surface using a set of aesthetic curves. For a given 3 control points we generate a sequence of three control points using the Bézier curve formulation and generate an aesthetic curve for each set of the three control points. Then we approximate the points on the set of the aesthetic curves with a B-spline surface.

1　緒言

「美しい曲線」は原田ら [1] により曲率対数分布図が直線で近似される曲線として提案された．三浦 [2, 4] は曲率対数分布図が厳密に直線で与えられる曲線の解析解を求め，それを「美しい曲線の一般式」として提案した．さらに，吉田と斎藤 [5, 6] は「一般式」によって定義される曲線の特徴を解析，分類するとともに，3 個の “制御点” により，2 つの端点とそこでの接線方向，および曲率対数分布図の直線の傾き α を与えることにより対話的に「美しい曲線セグメント」を生成する手法を提案した．本研究では「美しい曲線の一般式」を満足する曲線を美的曲線とよぶ．

美的曲線は，接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合であっても対話的な生成，変形が可能であり，実務への応用が期待されている．しかしながら，これまでの研究はすべて曲線に関するものであり，いまだに曲面への拡張は行われていない．そこで，本研究では美的曲線群を利用して自由曲面を生成する新たな手法を提案する．

図 1: 美的曲線群を利用して生成した自由曲面

2　自由曲面の生成法

曲面の生成法は，Oya ら [7] の手法と同様に，まず曲面を特徴づける境界線として guide curve を定義し，それらの境界線を通過するように曲面を生成する．本研究では四辺形の面を生成することを想定し，相対する 2 辺を guide curve として Bézier, あるいは B-spline 曲線で定義する．

生成する曲面の 2 つのパラメータを u, v として，u 方向の制御点数を 3 に限定し，$3 \times n$ 個の制御点に対して，図 2 に示すように，v 方向に 3 列の n 個の制御点を用いて Bézier, あるいは B-spline 曲線を生成し，任意の v に対して 3 個の制御点を生成する．これらの 3 点を用いて u 方向に美的曲線を生成する．図中実線で結ばれた 3 つの制御点 3 組は $v = 0, 0.5, 1.0$ に対して生成された美的曲線を生成するための制御点である．u 方向の 3 点の制御点が直線上に配置されていなければこれらの点は 1 つの平面内に存在するので，その平面内に美的曲線を生成する[1]．

美的曲線のパラメータは基本的には曲線長であるが，各曲線の全長に対する割合をパラメータ u とみなすことにより，任意のパラメータ値 (u, v), $0 \leq u, v \leq 1$ に対する曲面上の点を算出することができる．曲面を評価する，あるいは他の CAD システムに利用するために，その曲面を B-spline 曲面で近似する．

3　美的曲線

3.1　美しい曲線の一般式

曲線の曲線長 (弧長, 路長) を s，曲率半径を ρ とすると，曲率対数分布図の横軸は $\log \rho$，縦軸は $\log(ds/d(\log \rho)) = \log(\rho\, ds/d\rho)$ となる．曲率対数分布図が直線で与えられることから，ある定数 α が存在して，

$$\log(\rho \frac{ds}{d\rho}) = \alpha \log \rho + C \tag{1}$$

が成り立つ．ここで C は定数である．この式を美しい曲線の基本方程式とよぶ．式 (1) を変形すると，

$$\frac{1}{\rho^{\alpha-1}} \frac{ds}{d\rho} = e^C = C_0 \tag{2}$$

となる．したがって，ある定数 c_0 が存在して，

$$\rho^{\alpha-1} \frac{d\rho}{ds} = c_0 \tag{3}$$

が成り立つ．式 (3) より，$\alpha \neq 0$ であれば，美しい曲線の第 1 一般式

$$\rho^{\alpha} = c_0 s + c_1 \tag{4}$$

が得られ，$\alpha = 0$ の場合には，美しい曲線の第 2 一般式

$$\rho^{\alpha-1} \frac{d\rho}{ds} = c_0 \tag{5}$$

が得られる [2]．

3.2　美的曲線の生成

美的曲線を入力する方法として，吉田と斉藤は α を指定し，曲線の制御点として端点を指定する 2 点と両端点での接線方向を指定する点，計 3 点を入力することにより，美的曲線セグメントを生成する手法を提案した [5, 6]．本研究ではこの手法を用いて美的曲線を生成する．

3.3　任意平面内での美的曲線の生成

任意平面内にある 3 点から美的曲線を生成するためには，基準となる平面，例えば xy 平面に座標変換し，その平面内で美的曲線を生成した後，逆変換を行って初期位置に戻す必要がある．

[1] 3 点の制御点が 1 直線上に存在する場合は直線を生成する．

3 次元空間上の制御点 3 点によって生成される平面よりその法線を算出し，z 軸との外積を求める．外積により定まる方向を軸として，法線ベクトルと z 軸が一致するように回転させることにより xy 平面上に座標変換する．

3 次元空間において，同一直線上にない 3 点 $\boldsymbol{A}(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{B}(x_2, y_2, z_2)$，$\boldsymbol{C}(x_3, y_3, z_3)$ を通る平面の法線ベクトルは，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} \\
&\quad = ((y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1), \\
&\qquad (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (z_3 - z_1)(x_2 - x_1), \\
&\qquad (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))
\end{aligned}
$$

で与えられる．これと z 軸との外積を求める．

回転軸が単位ベクトル (n_1, n_2, n_3) で与えられているとすると，その軸周りの変換式は次式で与えられる [8]．

$$[X\,Y\,Z] = [x\,y\,z]\,[R]$$

ここで $[R]$ は，

$$
\begin{bmatrix}
n_1^2 + (1 - n_1^2)\cos\theta & n_1 n_2(1{-}\cos\theta){+}n_3\sin\theta & n_1 n_3(1{-}\cos\theta){-}n_2\sin\theta & 0 \\
n_1 n_2(1{-}\cos\theta){-}n_3\sin\theta & n_2^2 + (1 - n_2^2)\cos\theta & n_2 n_3(1{-}\cos\theta){+}n_1\sin\theta & 0 \\
n_1 n_3(1{-}\cos\theta){+}n_2\sin\theta & n_2 n_3(1{-}\cos\theta){-}n_1\sin\theta & n_3^2 + (1 - n_3^2)\cos\theta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

である．

上記の操作により点列を 2 次元平面に変換することができる．ここで，吉田と斎藤の方法 [5, 6] を用い，美的曲線を生成する．美的曲線を生成した後，逆変換を行い初期位置に曲線を生成する．

4　美的曲線群を利用した曲面の生成

4.1　曲面パッチ

$3 \times n$ の点群を制御点として，1 方向を美的曲線，もう 1 方向を Bézier 曲線で近似することにより曲面を構築する点群を生成することができる．これが曲面パッチとなる．図 2 は 3×3 の制御点に対して，v 方向に対して 3 次 Bézier 曲線により v の値を 0.1 ごとに増加させ美的曲線を生成するための 3 個の制御点を生成し，それらから美的曲線を生成している．

4.2　曲面を構成する点列の B-spline 曲面による近似

ここでは，意匠デザインや CG の分野で標準的に用いられている 3 次 B-spline 曲面で本論文で提案する自由曲面を近似することを考える．近似に用いる目的関数として，最小自乗法による位置の誤差を用いる．

近似すべき自由曲面を $\boldsymbol{S}(u, v)$，その曲面を近似する 3 次 B-spline 曲面を $\boldsymbol{S}_b(u, v)$ とする．$\boldsymbol{S}(u, v)$ に対して u, v 方向に等間隔に $m \times l$ 個の点 $\boldsymbol{Q}_{ij} = \boldsymbol{S}(u_i, v_j)$ をサンプリングし，以下の目的関数 R を最小化する．

$$R = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{l-1} |\boldsymbol{S}_b(u_i, v_j) - \boldsymbol{Q}_{ij}|^2 \qquad (6)$$

$\boldsymbol{S}_b$ の定義域を $0 \le u, v \le 1$，制御点を $\boldsymbol{P}_{ij}$, $i = 0, ..., n_u$, $j = 0, ..., n_v$ (したがって，B-spline 曲面のパッチ数は u 方向 $n_u - 2$ 個，v 方向 $n_v - 2$ 個) とし，4 隅の点はそれぞれ制御点 $\boldsymbol{P}_{00}$ と $\boldsymbol{P}_{n_u n_v}$ に一致するようにノットを多重化する．u 方向は美的曲線として定義されているので，各サンプリング点に対応するパラメータ u_i は，そこでの曲線長さを s_i とすると $\boldsymbol{S}(u, v_j)$ の全曲線長 L_j に対して $u_i = s_i / L_j$ と定める．式 (6) の変数は，制御点 $\boldsymbol{P}_{ij}$, $i = 0, ..., n_u$, $j = 0, ..., n_v$ の x，y, および z の座標値であり，これらの変数の 2 次式として式 (6) が与えられるので最小自乗法により最小化できる．　生成した曲面を図 3 に示す．

5　結言

本研究では，美的曲線を平面に拡張するための第 1 ステップとして，美的曲線群を利用して曲面を生成する手法を提案した．u 方向の制御点数を 3 に限定し，3 列の n 個の制御点を用いて Bézier, あるいは B-spline 曲線を生成し，任意の v に対して 3 個の制御点を生成した．これらの 3 点を用いて u 方向に美的曲線を生成することにより自由曲面パッチを定義した．

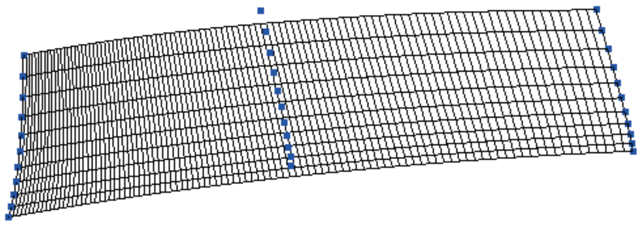

図 2: 美的曲線群を利用した自由曲面

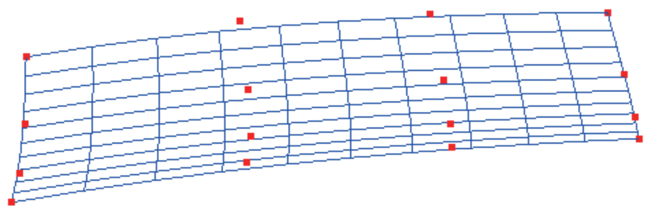

図 3: 双 3 次 B-spline 曲面 (制御点数 4×4) による近似

今後，u 方向の制御点数を 3 に限定するのではなく，任意数の制御点に対しても曲面が生成できるように改良する．また，美的平面曲線だけでなく，美的空間曲線 [3] に対して制御点からの生成法を新たに開発し，1 平面内に存在しない 4 点以上の制御点に対しても適用できるように提案手法を拡張する．また，近似により生成した B-spline 曲面を解析・評価することにより，提案した手法の有効性を確認する．

参考文献

[1] 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol.13, No.4, pp.149-158,1998.

[2] 三浦憲二郎，美しい曲線の一般式，グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, 2005.

[3] 三浦憲二郎, 藤澤誠, 美的曲線の 3 次元への拡張と B-spline 曲線による近似, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, pp.227-232, 2006.

[4] 三浦憲二郎，美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 Vol.72, No.7, pp.857-861, 2006.

[5] 吉田典正, 斎藤隆文, 美しい曲線の全体像解明と対話的制御, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, pp.77-82, 2006.

[6] N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.

[7] T. Oya, T. Mikami, T. Kaneko and M. Higashi, Parametric Design Method for Shapes with Aesthetic Free-Form Surfaces, Proc. Geometric Modeling and Processing - GMP 2006, pp.371-384, 2006.

[8] D. Rogers and J. Adams, コンピュータグラフィックス, 日刊工業新聞社, 1979.