G^2 連続性を保証する美的曲線の生成法

静岡大学大学院　〇三浦　憲二郎　川田　洋平　上利　真一　藤澤　誠

Generation of Aesthetic Curves with G^2 continuity

Grad. Sch., Shizuoka Univ.　Kenjiro T. MIURA　Yohei KAWATA　Shin-ichi AGARI　Makoto FUJISAWA

The aesthetic curves include the logarithmic (equiangular) spiral, clothoid, and involute curves. Although most of them are expressed only by an integral form of the tangent vector, it is possible to interactively generate and deform them and they are expected to be utilized for practical use of industrial and graphical design. However, their input method proposed so far by use of three so-called control points can generate only an aesthetic curve segment with monotonic curvature variation and can not create a curve with the curvature-extremal point or the inflection point. Hence at first we propose a technique to input an aesthetic curve segment with an inflection point at its end. Then we propose a method to generate an aesthetic curve with G^2 continuity from a sequence of 2D points input with, for example, a liquid cristal pen tablet.

1　緒言

「美しい曲線」は原田ら [1] により曲率対数分布図が直線で近似される曲線として提案された．三浦 [3, 4] は曲率対数分布図が厳密に直線で与えられる曲線の解析解を求め，それを「美しい曲線の一般式」として提案した．さらに，Yoshida と Saito[5] は「一般式」によって定義される曲線の特徴を解析，分類するとともに，3 個の “制御点” により, 2 つの端点とそこでの接線方向，および曲率対数分布図の直線の傾き α を与えることにより対話的に「美しい曲線 (美的曲線) セグメント」を生成する手法を提案した．

美的曲線は，対数 (等角) らせん ($\alpha = 1$)，クロソイド曲線 ($\alpha = -1$)，さらにインボリュート曲線 ($\alpha = 2$) を含むとともに，接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合 ($\alpha \neq 1, 2$) であっても対話的な生成，変形が可能であり，実務への応用が期待されている．しかしながら，Yoshida らの入力法では，曲率が単調に増加，または減少する美的曲線セグメント１本しか入力することができず，曲率が増減し曲率の極値を持つ曲線や曲率の正負が反転する変曲点を持つ曲線を入力することができない．

そこで，本研究では液晶ペンタブレット等で入力された点列を元として，その点列を 3 次 B-spline 曲線で近似して平滑化するとともに，B-spline 曲線の変曲点と曲率の極値を持つ位置でセグメントに分割する．各セグメントの曲率対数分布図から α 値を決定し，その値を用いて美的曲線に近似して再度平滑化する[1]ことで美的曲線を入力する方法を提案する．さらに，曲率の極値を持つ位置の個数を限定することで単純化された美的曲線を生成する．美的曲線セグメント間の曲率は一般に不連続となるのでそれらの曲率が連続になるように変形する手法を提案する．

2　変曲点を始点とする美的曲線セグメント

曲線の変曲点では曲率 κ が 0 となり，その点を挟んで右曲がりから左曲がり，あるいは左曲がりから右曲がりへと正負を区別した曲率の符号が反転し，曲線のデザインにおいて重要な役割を果たしている．変曲点では曲率半径 ρ が無限大となり，ρ を用いた曲線の定式化では適切に変曲点を扱うことができない．この章では，Yoshida らの提案した 3 点による美的曲線セグメントの入力法 [5] について述べるとともに，変曲点を始点とする美的曲線セグメントの入力法について提案する．

2.1　美的曲線セグメントの生成

美的曲線を入力する方法として，Yoshida ら [5] は α を指定し，曲線の制御点として端点を指定する 2 点と両端点での接線方向を指定する点の計 3 点を入力することにより，美的曲線セグメントを生成する手法を提案した [5]．美的曲線セグメント入力に用いている定式化では，原点を通過する標準的な位置に置かれた標準形の曲線セグメントの曲線長 s，曲率半径 ρ，および接線の方向角 θ の関係と曲線上の点を求める積分式を導出している．標準形の曲線セグメントは入力された 3 点に両端点と両端点での接線方向が一致するように相似変換される．

[1] ここでの平滑化は，曲率の変化が規則的であることを意味している．

2.2　変曲点を始点とする美的曲線の定式化

Yoshida らの研究 [5] が明らかにしたように，曲線長を有限とすると美的曲線セグメントが変曲点を持つための必要十分条件は曲率対数分布図の傾き $\alpha < 0$ である．以下の定式化では $\alpha < 0$ と仮定する．

複素平面内において，$s\ (> 0)$ を曲線長とすると美的曲線の一般式は次式で与えられる [3, 4].

$$\boldsymbol{C}(s) = \boldsymbol{P}_0 + \int_0^s e^{ib} e^{iat^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} dt \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{P}_0$ は始点，a, b は定数であり，e^{ib} は始点での接線方向である．上式の標準形として，$a > 0$ に限定し，原点を始点，実軸の正の方向を原点での接線方向とする曲線を考える．a を変化させても曲線は相似となることから $a = 1$ とすると標準形は,

$$\boldsymbol{C}(s) = \int_0^s e^{it^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} dt \tag{2}$$

である．この曲線の方向角 θ は $\theta = s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ であり，この曲線の曲率 κ は,

$$\kappa = \left| \frac{d^2\boldsymbol{C}(s)}{ds^2} \right| = \frac{\alpha - 1}{\alpha} s^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3}$$

で与えられる．したがって，任意の負の値 α に対して $s = 0$ で $\kappa = 0$ であり始点は変曲点である．s と θ を κ の関数で表すと,

$$s = \frac{(\alpha-1)^\alpha}{\alpha^\alpha}\kappa^{-\alpha}, \quad \theta = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha-1}}\kappa^{1-\alpha} \tag{4}$$

である．また，θ を用いて κ を表すと,

$$\kappa = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\theta^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{5}$$

である．

2.3　3 点による入力

前節で変曲点を始点とする美的曲線セグメントの標準形の曲線長 s, 方向角 θ, および曲率 κ の関係を記述した．2.1 節で説明した 3 点による美的曲線セグメントの入力法では，与えられた任意の α に対して両端点の位置とそこでの接線方向を指定することができた．しかしながら，さらに 1 つの端点を変曲点と指定する場合，そこでの曲率の値を 0 とする拘束条件が増えるため任意の α を指定することはできない．そこで α を変数とすることでこれらの条件を満足する美的曲線セグメントを生成する．

前節で述べたように $\theta = s^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ であり，s が一定であれば θ は α の増加にともなって増加する．また，α の増加にともない変曲点でないもう 1 つの端点での曲率は増大し曲線長 s も増大する (図 1，2 参照)．したがって，α の増減と θ の増減が一致するので，Yoshida らの美的曲線セグメントの入力法における第 2 標準形の Λ の算出と同様に，二分法により高速に α を算出することができる．

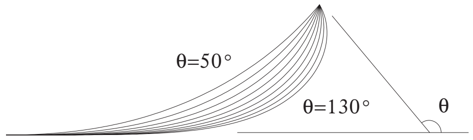

図 1: 変曲点を端点として持つ美的曲線セグメント

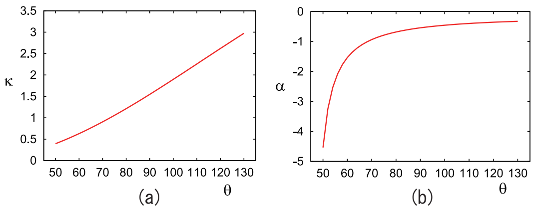

図 2: 曲線群の方向角 θ に対する曲率 κ と傾き α

3　美的曲線生成アルゴリズム

G^2 連続である美的曲線を以下のアルゴリズムで生成する．1) ペンタブレット等により点列を入力する．2) 与えられた近似度を満足するように入力された点列から B-Spline 曲線を生成し点列を平滑化する．3) 変曲点と曲率が極値となる位置で B-Spline 曲線をセグメントに分割する．4) 各セグメントに対し，そのセグメントが変曲点を端点としない場合は，その曲率対数分布図を求め，その図を直線で近似することで α 値を算出する．変曲点を持つ場合は α を変数として端点とそこでの接線方向を満たす α を算出する．5) 前ステップで求めた α 値を用いて，セグメントの両端点とそこでの接線方向を用いて，各セグメントに対応するさらに平滑化された美的曲線セグメントを生成する．6) 美的曲線セグメント間の曲率は一般に不連続となるのでそれらの曲率が連続になるように変形する．

3.1　美的曲線セグメントの生成

変曲点と極値によって分割した 3 次 Bézier 曲線の各々を美的曲線セグメントにより近似する．Yoshida らの方法 [5] を適用するために，Bézier 曲線の両端点での接線を求め，それらの交点を算出する．Bézier 曲線より曲率対数分布図のグラフ上の点を離散的に求め，それらを最小自乗法により近似し傾き α を求める．その値を用いて両端点と交点の計 3 点を用いて美的曲線セグメントを算出する．この方法では各セグメント間で接線は連続となるが，曲率は不連続となる．

3.2　曲率を連続とする変形：2 本のセグメント間

この節では 2 つの美的曲線セグメント間の曲率を連続にさせる変形法について述べ，次節で 3 本以上のセグメントからなる美的曲線の変形法について説明する．

図 3 に端点を変曲点とする 2 つの美的曲線セグメントから構成される美的曲線を示す．美的曲線の両端点は変曲点であり，2 つの曲線セグメントは図で示した制御点 (図中の折れ線の頂点) から生成されている．

美的曲線セグメント生成のために α を含めてすべてのパラメータを用いているので，2 つのセグメント間の曲率を連続にするためには，それらのセグメントの制御点の位置を変化させる必要がある．したがって，できるだけ元の形状を維持する方法として，1) 2 つのセグメントの共通の端点を移動させる，あるいは，2) 2 つのセグメントの共通の端点での接線方向を変化させる，の 2 つが考えられる．通常端点の位置はそこでの接線方向よりもデザイン上重要と考えられるので，本研究では共通の端点での接線方向を変化させる．

美的曲線セグメントは標準形の曲線セグメントに相似変換を施して生成するため，与えられた制御点の位置から直接解析的に両端点での曲率を求めることはできず，数値的な手法を用いて相似変換の変換行列を算出しなければその大きさを求めることはできない．しかしながら，一般的に図 1，2 に示すように，左曲がり (右曲り) の曲線セグメントでは方向角 θ に対して端点での曲率 κ は単調に増加 (減少) する．

図 1 は $(0,0)$ を変曲点，$(\sqrt{2}+1,1)$ をもう 1 つの端点とし，そこでの方向角 θ を 50°から 130° に変化させて生成した美的曲線セグメント群を示している[2]．図 2(a) は θ に対する曲率 κ を，図 2(b) は α の値をプロットしている．これらの図からわかるように，θ の増加に対して κ, α ともに増加している．定性的にこれら 3 つの変数の関係が保たれているならば，変形前の曲率の差が図 3(a) のように与えられている場合，前半の曲線セグメントの曲率が相対的に後半のセグメントの曲率よりも小さいので，図 3(b) のように，共通の端点で左回りに方向角を回転させることにより，前半のセグメントの曲率を増加させ，後半の曲率を減少させることができ，ここでも二分法により高速に曲率を一致させることができる．

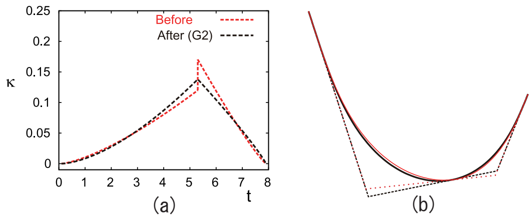

図 3: 変曲点を端点とする 2 本の美的曲線セグメント

3.3　曲率を連続とする変形：曲線全体

前節の説明では端点を変曲点とする美的曲線セグメントを例としており，1 つの端点での曲率は 0 に固定されており，たとえ他のセグメントに接続していても変形による曲率の変化は, 2 つのセグメント内に限定されていると考えることができ, 曲率の連続性に影響を与えない．一般的な美的曲線セグメントでは 1 つの端点での曲率の連続性を保証するための変形は，もう 1 つの端点での曲率の大きさを変化させることになり，そこでの連続性を損なってしまう．

したがって，セグメント間の方位角を変数とし目的関数を各セグメント間の曲率の差の 2 乗とし，Powell 法 [2] のような目的関数の微分を必要としない数値的な最適化手法を用いることが望ましい．しかしながら，一般的に数値的な最適化手法は処理が遅く，さらに目的関数の微分が求められない場合には処理速度は非常に遅くなる．そこで，前節で提案した手法を曲率の差の大きいセグメント間に順次適用し，すべてのセグメント間の曲率の差がある閾値以下に収束したら処理を終える手法を用いる．

4　結論

本研究では変曲点や曲率の極値を持つ美的曲線を生成するアルゴリズムを提案した．端点が変曲点となる場合には α を変数として端点とそこでの接線方向を満たす曲線を生成した．さらに，美的曲線セグメント間の曲率を連続とする変形法を提案し曲線の G^2 連続性を保証した．今後，ペンの筆圧や傾き，描画速度の近似への反映をし，美的曲線，さらには曲面をデザインする CAD システムの開発を行う．

参考文献

[1] 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol.13, No.4, pp.149-158, 1998.

[2] W.H. Press et al., Numerical Recipes in C++, Cambridge University press, 2002.

[3] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, 2005.

[4] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 Vol.72, No.7, pp.857-861, 2006.

[5] N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.

[2] 方向角が 45°であれば 1 番目，2 番目の制御点間と 2 番目，3 番目の制御点間の距離は一致し円弧を生成すべきである．