

Кривые высокого качества и их применение в геометрическом моделировании и эстетическом дизайне

High-quality curves and their applications in geometric modeling and aesthetic design

Рушан Зиятдинов,
ассистент-профессор, к.ф.-м.н
rushanziatdinov@yandex.ru, ziatdinov@fatih.edu.tr
Университет Фатих, Стамбул, Турция

Кенджиро Т. Миура
профессор, д.т.н
tmkmiur@ipc.shizuoka.ac.jp
Университет Сидзуока, Япония

Аннотация. В статье рассматриваются семейства кривых с монотонными функциями кривизны и их применение в геометрическом моделировании и эстетическом дизайне. Приводится пример моделирования поверхности кузова автомобиля с помощью эстетических сплайнов.

Abstract. In this paper we discuss on the families of curves with monotonic curvature functions, as well as their applications in geometric modeling and aesthetic design. We also provide an example of car's body design by aesthetic splines.

1. Введение

Эстетическая привлекательность промышленных продуктов является очень важным фактором для их успешного продвижения на рынке сбыта. Большинство кривых и поверхностей, используемых в традиционных системах CAD/CAM [1], имеют полиномиальный или рациональный параметрический вид и не удовлетворяют высоким эстетическим требованиям [2]. Одним из их недостатков является сложность контролирования монотонности функции кривизны кривой.

2. Кривые с монотонной функцией кривизны

В геометрическом дизайне кривые с монотонными функциями кривизны известны как *fair curves* [3]. К ним можно отнести спирали с монотонными функциями кривизны (спирали Эйлера, Нильсена, логарифмическая спираль, инволюта окружности), *псевдоспирали* [4], а также так называемые *эстетические кривые* [2], по сути являющиеся линейной репараметризацией псевдоспиралей. Все эти перечисленные кривые

входят в семейство *суперспиралей* [5], кривизна которых задается Гауссовой гипергеометрической функцией, удовлетворяющей условиям строгой монотонности при некоторых ограничениях, накладываемых на ее параметры [6]. В последнее время были предложены кривые Безье класса А [7], функция кривизны которых монотонна, однако их более детальный анализ показал, что при повышении степени полинома кривая сходится к логарифмической спирали [8]. Вообще, контролирование монотонности кривизны кривых Безье и В-сплайнов порядка $n > 2$ нуждается в более глубоком анализе и разработке соответствующих алгоритмов. Кривые, удовлетворяющие монотонности функции кривизны, широко применяются в дизайне поверхностей автомобилей, моделировании фасок, построении переходных кривых в дизайне высокоскоростных магистралей и железнодорожных путей, дизайне шрифтов [9-10] и являются неотъемлемыми составляющими *эстетического дизайна* [11]. На Рис.1 представлен новый концептуальный дизайн автомобиля, созданный при помощи эстетических кривых и *мультиспиралей* [10].

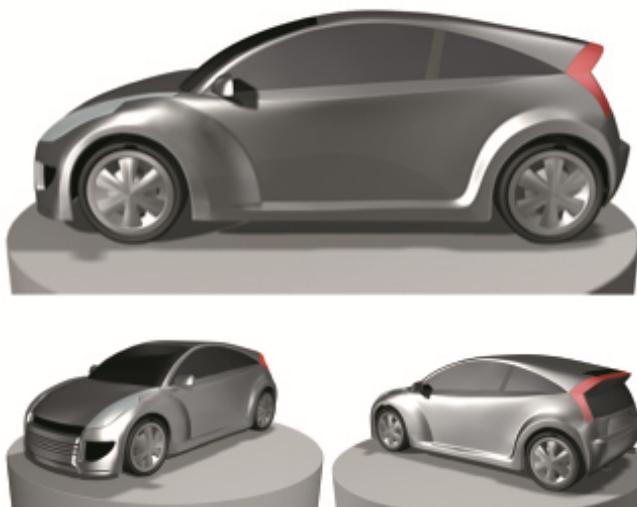


Рис.1 Новый концептуальный дизайн автомобиля¹, созданный с помощью эстетических кривых, мультиспиралей и кинематических спиральных поверхностей.

3. Математический аппарат эстетических кривых

Наиболее интересными с точки зрения эстетического дизайна и возможных приложений являются эстетические кривые¹, математическая

¹ Создан профессором Такаши Хада и Томонобу Нишикава (Факультет дизайна, Университет искусств и культуры, г. Сидзуока, Япония).

теория которых разрабатывалась в работах [12-15], [2], [9]. Тошинобу Харада и его исследовательская группа путем изучения характеристик множества кривых привлекательной формы, присущих объектам реального и виртуального миров, установили, что их функции кривизн в зависимости от натурального параметра (длины дуги) в логарифмической шкале имеют линейный, либо близкий к линейному вид [12-13]. Натуральные уравнения этих кривых имеют следующий вид [8]:

$$\kappa(s) = \begin{cases} e^{-\lambda s}, & \alpha = 0 \\ (\lambda \alpha s + 1)^{-\frac{1}{\alpha}}, & \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

где α - параметр формы, λ - масштабный фактор. В [2] для вычисления сегментов кривых использовался численный метод Гаусса-Кронрода, позже в работе [9] были получены параметрические уравнения для (1), в которых используются неполные Гамма-функции, позволяющие с высокой точностью вычислять сегменты кривой. В [2] путем вычислительного эксперимента были получены допустимые регионы для контрольной точки, определяемой направлением единичных касательных векторов в начальной и конечной точках сегмента эстетической кривой. Установлено, что спирали Эйлера ($\alpha = -1$), Нильсена ($\alpha = 0$), а также инволюта окружности ($\alpha = 2$) имеют ограниченные допустимые регионы для контрольной точки, определяемой направлением единичных касательных векторов в начальной и конечной точках, и сегмент кривой, удовлетворяющий направлениям касательных, не всегда существует. Тем не менее, задача двухточечной Эрмитовой интерполяции, судя выполненному в [2] вычислительному эксперименту, всегда имеет решение для спиралей с параметром формы $0 \leq \alpha \leq 1$, однако это утверждение до сих пор не является аналитически доказанным. Йошида и Сайто [2] исследовали поведение линий отражения на линейчатых спиральных поверхностях и пришли к выводу, что при вращении кинематических поверхностей на них отсутствуют осцилляции линий отражения, что является одной из характеристик их высочайшего качества.

Некоторые примеры применения эстетических сплайнов класса C^1 можно найти в [16].

4. Единичные кватернионные интегральные кривые

В [17] впервые был предложен класс *единичных кватернионных кривых* $q(s)$ в группе вращений $SO(3)$, а также разработан метод, с помощью которого кривую в \mathbb{R}^3 , определяемую взвешенной суммой базисных функций, можно преобразовать в ее единичный кватернионный аналог в $SO(3)$. К примеру, используя предложенный в [17] метод для таких сплайнов, как сплайны Безье, Эрмитовы и В-сплайны, могут быть получены

¹ В зарубежной литературе они известны под названием *log-aesthetic curves* (LAC), предложенным профессором Карло Секвин из Калифорнийского университета (США).

единичные кватернионные кривые, многие дифференциальные свойства которых инвариантны.

Единичная кватернионная интегральная кривая (QI-кривая) определяется следующим образом:

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) ds, \quad (2)$$

где s - длина дуги, \hat{v}_0 - произвольный единичный вектор. В данном случае кватернионы, в особенности единичные, удобны для описания вращений, используются для контролирования направления касательного вектора, что добавляет некоторую эффективность и простоту в дизайне кривой эстетической формы. Кватернионные координаты считаются идеальными для интерполяции ориентации объектов [19].

В силу того, что QI-кривая определяется вектором касательной, контролируемым единичной кватернионной кривой, и длина дуги есть ее натуральный параметр, возможно более удобное манипулирование ее функцией кривизны, нежели у более традиционных для CAD/CAM систем полиномиальных параметрических кривых.

5. Заключение

Плоские кривые с монотонной функцией кривизны широко применяются в компьютерном геометрическом дизайне и компьютерной графике. Область их применения достаточно широка – начиная с дизайна шрифтов до моделирования поверхностей самолетов и баллистических ракет.

Нам также представляется весьма интересным разработка алгоритмов для генерации и контролирования кривизны кривых Безье класса A, в качестве базисных функций содержащих обобщенные полиномы Бернштейна, а именно линейные операторы Станку [20], Лупаса [21] или Виденского [22]. Изучению этих вопросов будут посвящены наши дальнейшие работы.

Литература

- [1] Farin, G., 2001. Curves and Surfaces for CAGD, Morgan Kaufmann, 5th edition.
- [2] Yoshida, N., Saito, T., 2006. Interactive aesthetic curve segments. The Visual Computer 22 (9), 896–905.
- [3] Levien, R., Séquin, C., 2009. Interpolating splines: which is the fairest of them all? Computer-Aided Design and Applications 4, 91–102.
- [4] A. A. Savelov. 1960. Planar curves, GIFML: Moscow (in Russian).
- [5] Ziatdinov, R. 2012. Family of superspirals with completely monotonic curvature given in terms of Gauss hypergeometric function. Computer Aided Geometric Design 29(7): 510-518.
- [6] Miller, K.S., Samko, S.G., 2001. Completely monotonic functions. Integral Transforms and Special Functions 12 (4), 389–402.
- [7] Farin, G., 2006. Class A Bézier curves. Computer Aided Geometric Design 23 (7), 573–581.
- [8] N. Yoshida, T. Hiraiwa, T. Saito. 2008. Interactive Control of Planar Class A Bezier Curves using Logarithmic Curvature Graphs, Computer-Aided Design & Applications 5(1-4), 121-130.

- [9] Ziatdinov, R., Yoshida, N., Kim, T. 2012. Analytic parametric equations of log-aesthetic curves in terms of incomplete gamma functions. *Computer Aided Geometric Design* 29 (2), 129–140.
- [10] Ziatdinov, R., Yoshida, N., Kim, T. 2012. Fitting G^2 multispiral transition curve joining two straight lines. *Computer Aided Design* 44 (6), 591–596.
- [11] Dankwort, C.W., Podehl, G., 2000. A new aesthetic design workflow: results from the European project FIORES. In: *CAD Tools and Algorithms for Product Design*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, pp. 16–30.
- [12] Harada, T., Mori, N., Sugiyama, K. 1995. Curves' physical characteristics and self-affine properties, *Design Research* 42 (3), 30-40 (in Japanese).
- [13] Harada, H. 1997. Study of quantitative analysis of the characteristics of a curve, *Forma* 12(1), 55-63.
- [14] Miura, K.T., 2006. A general equation of aesthetic curves and its self-affinity. *Computer Aided Design and Applications* 3 (1–4), 457–464.
- [15] Miura, K., Sone, J., Yamashita, A., Kaneko, T., 2005. Derivation of a general formula of aesthetic curves. In: *8th International Conference on Humans and Computers (HC2005)*. Aizu-Wakamutsu, Japan, pp. 166–171.
- [16] Rushan Ziatdinov, Kenjiro T. Miura, 2012. On the variety of planar spirals and their applications in computer aided design, *European Researcher* 27(8-2), 1227-1232.
- [17] Kim, M.-J., Kim, M.-S. and Shin, S.Y., 1995. A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives, in: *SIGGRAPH '95 Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 369–376.
- [18] Miura, K.T., 2000, Unit Quaternion Integral Curve: A New Type of Fair Free-Form Curves, *Computer Aided Geometric Design* 17(1), 39-58.
- [19] Shoemake, K. 1985, Animating Rotation with Quaternion Curves, *Computer Graphics* 19, 245-254.
- [20] D.D. Stancu. 1968. Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Rev. Roumaine Math. Pur. Appl.* 13, 1173 - 1194.
- [21] Lupas, A., 1987. A q-analogue of the Bernstein operator, *University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus*, Preprint 9, 85-92.
- [22] В.С. Виденский. 2008. Замечание о рассмотренных А. Лупасом рациональных положительных операторах // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования ("Герценовские чтения - 2008")*. СПб.:РГПУ имени А.И. Герцена, 2008. С. 134-146.