

細分割曲線・曲面理論

三浦憲二郎 **

Subdivision Curve and Surface Theory

Kenjiro T. Miura

Subdivision surfaces are powerful tools for graphical modeling and animation because of their scalability, numerical stability, simplicity in coding and, especially, their ability to represent complex shape of arbitrary topology. In this article, the subdivision process of B-spline curve is analyzed in detail and the subdivision surfaces, especially Catmull-Clark and Doo-Sabin surfaces, which are extensions of tensor product B-spline surfaces, are discussed.

Key words: subdivision curve, subdivision surface, B-spline, Chaikin, Catmull-Clark, Doo-Sabin

1. 序 論

細分割曲面は、曲面生成のための計算が数値的に安定であることやその計算アルゴリズムの実装が容易であること、巨大メッシュにも無理なく適用可能であるスケーラブルな性質を持つこと、さらには複雑な位相構造を持つ立体を表現できることから形状モデリングの強力な道具となっている。この解説では細分割曲線・曲面の基礎理論、特に CAD/CAM 分野において標準となっている B-spline 曲線・曲面と細分割曲線・曲面との関係を明らかにする。

以下では、議論が煩雑になるのを防ぐために、曲線の端点や曲面の境界線を考慮せず、曲線は無限に長い閉じていると仮定し、曲面の場合も無限の広がりを持つ閉じていると仮定する。端点を持つ、あるいは境界線を持つ場合であっても細分割規則を適切に局所的に変更すれば同様な議論が成り立つ。例えば、端点を内挿する (end-point interpolating) B-spline 曲線の端点周辺での細分割規則を定めることも可能である。

2. Chaikin のアルゴリズム

細分割の基本的な考え方は、区分線型関数 (piecewise linear function) $f^0(x)$ を繰り返し再帰的に精緻化 (refinement) することにより、より詳細化された関数の列 $f^1(x), f^2(x), \dots$ を生成し、その極限として目的の関数 $f(x)$ を定義する:

$$f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} f^j(x).$$

1974 年, Chaikin²⁾ により始めて細分割手法が提案された。

図 1 に示すように Chaikin のアルゴリズムは繰り返しポリゴンのコーナをカットすることにより滑らかな曲線を生成する。1 回の細分割によりポリゴンの各辺の $(1/4, 3/4)$ の位置に新たな点を生成する。各辺の端点を p_i^0, p_{i+1}^0 とすると新しい 2 つの頂点は、

$$p_{2i}^1 = \frac{1}{4}(3p_i^0 + p_{i+1}^0), \quad (1)$$

$$p_{2i+1}^1 = \frac{1}{4}(p_i^0 + 3p_{i+1}^0). \quad (2)$$

Chaikin のアルゴリズムは典型的な細分割曲線の定義法であり、生成される曲線は初期ポリゴンの頂点を制御点とする 2 次

B-spline 曲線と一致する。

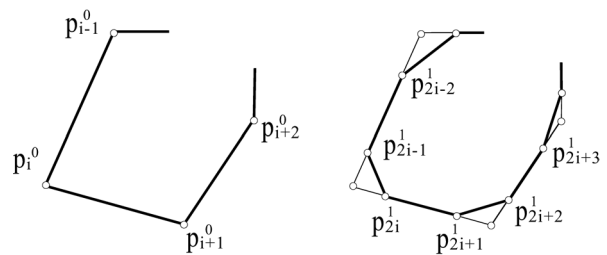


Fig. 1 Chaikin のアルゴリズム

同様に、連続する 3 つの制御点を $p_{i-1}^0, p_i^0, p_{i+1}^0$ とし、

$$p_{2i}^1 = \frac{1}{8}(p_{i-1}^0 + 6p_i^0 + p_{i+1}^0) \quad (3)$$

$$p_{2i+1}^1 = \frac{1}{2}(p_i^0 + p_{i+1}^0) \quad (4)$$

の細分割規則を繰り返し適用すると 3 次 B-spline 曲線に収束する。式 (4) は稜線上に新たに頂点を生成するので分割 (splitting) と呼ばれ、式 (3) は頂点座標を重みを付けて平均化するので平均化 (averaging) と呼ばれる。Chaikin のアルゴリズムの式 (1), (2) は、稜線を分割するのではなく頂点を分割している (vertex splitting) ととらえることができる。

以下、上記の式に表れた係数 $1/4(3, 1), 1/4(1, 3)$, あるいは $1/8(1, 6, 1), 1/2(1, 1)$ について B-spline 曲線の定義との関係を考察する。

3. B-spline の定義

B-spline を定義する方法としては、漸化式による方法⁶⁾ など様々な手段が考えられるが、ここでは参考文献¹⁷⁾の議論にしたがって合成の繰り返し (repeated convolution) により定義し、なぜ細分割により B-spline 曲線が生成されるかを明らかにする。まず、最も簡単な区分定数関数 (piecewise constant function) の場合について述べる。任意の区分定数関数は、

$$x(t) = \sum x_i B_0^i(t)$$

と表される。ここで、 $B_0(t)$ は次式で定義される箱関数 (box function, 図 2(a) 参照):

$$B_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

* 原稿受付 平成 15 年 1 月 31 日

** 正 会 員 静岡大学 (静岡県浜松市城北 3-5-1)

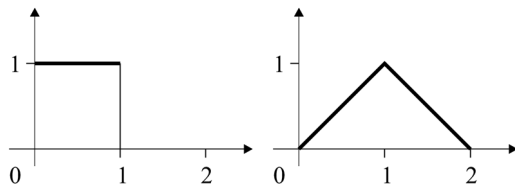
であり, 関数 $B_0^i(t) = B_0(t-i)$ は $B_0(t)$ の移動 (translate) である. 2つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ の連続合成 (continuous convolution) を,

$$(f \otimes g)(t) = \int f(s)g(t-s)ds$$

で定義すると, 次数 n の B-spline 基底関数は $n-1$ 次の基底関数と $B_0(t)$ との合成により得られる. 例えば, 次数 1 の B-spline は $B_0(t)$ とそれ自身の合成により定義される:

$$B_1(t) = \int B_0(s)B_0(t-s)ds.$$

関数 $B_1(t)$ は図 2(b) に示す線形帽子関数 (linear hat function) となる.



(a) 箱関数 $B_0(t)$ (b) 帽子関数 $B_1(t)$

Fig. 2 箱関数と帽子関数

次数 2 の B-spline は $B_1(t)$ と $B_0(t)$ を合成し,

$$B_2(t) = \int B_1(s)B_0(t-s)ds$$

として計算できる. この場合, 結果として得られる曲線はそれぞれ間隔 $(0, 1)$ と $(1, 2)$, $(2, 3)$ で定義される 3 つの 2 次セグメントから構成される. 一般に l 回合成することにより次数 l の B-spline:

$$B_l(t) = \int B_{l-1}(s)B_0(t-s)ds$$

が得られる.

3.1 B-spline の精緻化可能性

B-spline と細分割との関係を論ずる際に重要となるのは, B-spline が精緻化方程式 (refinement equation) を満たすことである. 次数 l の B-spline に対する精緻化方程式は,

$$B_l(t) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} B_l(2t-k) \quad (5)$$

である. 上式の意味は次数 l の B-spline は k によるそれ自身の移動 (translate) と $2t$ による伸張 (dilate) の線型結合により表されることである. 上式の例として, 図 2(b) で示した帽子関数について考える. 伸張された 3 つの帽子関数を $(1/2, 1, 1/2)$ の重みを付けて線型に結合することにより元の帽子関数が得られる.

以下で精緻化方程式が成り立つことを証明する. 次数 0 の B-spline はそれ自身の移動と伸張により,

$$B_0(t) = B_0(2t) + B_0(2t-1)$$

と書ける. 同様に, 次数 l の B-spline は,

$$B_l(t) = \bigotimes_{i=0}^l B_0(t) = \bigotimes_{i=0}^l (B_0(2t) + B_0(2t-1))$$

と書き表せる. $m(t) = f(t) \otimes g(t)$ であるとき, 一般的に合成は以下の性質を持つ:

$$\text{線形性: } f(t) \otimes (g(t) + h(t)) = f(t) \otimes g(t) + f(t) \otimes h(t),$$

$$\text{時間シフト: } f(t-i) \otimes g(t-k) = m(t-i-k),$$

$$\text{時間スケーリング: } f(2t) \otimes g(2t) = \frac{1}{2}m(2t).$$

例えば, $B_1(t)$ の場合,

$$\begin{aligned} B_1(t) &= B_0(t) \otimes B_0(t) \\ &= (B_0(2t) + B_0(2t-1)) \otimes (B_0(2t) + B_0(2t-1)) \\ &= \frac{1}{2}(B_1(2t) + 2B_1(2t-1) + B_1(2t-2)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} B_1(2t-k). \end{aligned}$$

これを一般化するには, 二項定理:

$$(u+v)^{l+1} = \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} u^{l+1-k} v^k$$

に u として $B_0(2t)$ を代入し, v として $B_0(2t-1)$ を代入すればよい. 以上の議論から精緻化方程式 (5) が一般の次数 l の B-spline について成り立つことがわかった.

3.2 スプライン曲線の精緻化

スプライン曲線を,

$$C(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \sum_i p_i B_i^l(t)$$

とする. ここで曲線の次数は l でありその制御点を $(x_i, y_i, z_i)^T = p_i \in \mathbf{R}^3$ とする.

さて, 議論を簡単にするために曲線が無限に長く端点がない場合を考え, 与えられた曲線の制御点のベクトルを \mathbf{p} とする:

$$\mathbf{p} = [\cdots p_{-2} \quad p_{-1} \quad p_0 \quad p_1 \quad p_2 \cdots]^T.$$

さらに, 関数 $B^l(t)$ の移動を持つベクトル $\mathbf{B}^l(t)$ を考える:

$$\mathbf{B}^l(t) = [\cdots B^l(t+2) \quad B^l(t+1) \quad B^l(t) \quad B^l(t-1) \quad B^l(t-2) \cdots].$$

これらのベクトルを用いて曲線を $\mathbf{B}^l(t)\mathbf{p}$ で表す. 精緻化の関係を用いて $\mathbf{B}^l(t)$ をその伸張:

$$\mathbf{B}^l(2t) = [\cdots B^l(2t+2) \quad B^l(2t+1) \quad B^l(2t) \quad B^l(2t-1) \quad B^l(2t-2) \cdots]$$

により書き換えることを考える. そのために行列 \mathbf{S}^l を導入し,

$$\mathbf{B}^l(t) = \mathbf{B}^l(2t)\mathbf{S}^l$$

と書くと, \mathbf{S}^l の成分は式 (5) より,

$$S_{2i+k, i}^l = s_k^l = \frac{1}{2^l} \binom{l+1}{k}.$$

各列の 0 でない成分は精緻化方程式の重みであり, 隣同士の 2 列の関係を見ると, 左の列の成分を 2 行下げた成分を右の列は

持つ. 例えば, $l = 2$ の場合は,

$$\mathbf{S}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & 1 & 3 & & & \\ & & & 3 & 1 & & \\ & & & 1 & 3 & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる. $l = 3$ の場合は,

$$\mathbf{S}^3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & 1 & 6 & 1 & & \\ & & & 4 & 4 & & \\ & & & 1 & 6 & 1 & \\ & & & & 4 & 4 & \\ & & & & 1 & 6 & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる.

この関係より,

$$C(t) = \mathbf{B}^l(t)\mathbf{p} = \mathbf{B}^l(2t)\mathbf{S}^l\mathbf{p}.$$

曲線の形状は不変であるが, 元の基底 $\mathbf{B}^l(t)$ を台 (support) の大きさが半分になった新しい基底 $\mathbf{B}^l(2t)$ で置き換えたので, 曲線の元の制御点 \mathbf{p} は新しい制御点 $\mathbf{S}^l\mathbf{p}$ に変更される. この処理を繰り返して行えば,

$$\begin{aligned} C(t) &= \mathbf{B}^l(t)\mathbf{p}^0 \\ &= \mathbf{B}^l(2t)\mathbf{p}^1 = \mathbf{B}^l(2t)\mathbf{S}^l\mathbf{p}^0 \\ &\vdots \\ &= \mathbf{B}^l(2^j t)\mathbf{p}^j = \mathbf{B}^l(2^j t)(\mathbf{S}^l)^j\mathbf{p}^0. \end{aligned}$$

したがって, 異なる細分割レベルの制御点の関係は,

$$\mathbf{p}^{j+1} = \mathbf{S}^l\mathbf{p}^j$$

となる. この関係式を個々の制御点について書き直すと 2 次の場合は式 (1), (2) に対応し, 3 次の場合は式 (3), (4) に対応する.

実は, 上記の精緻化の手順は連続するノット間に新たにノットを挿入することと等価な処理となっている. その意味で B-spline の細分割はノットの 2 重化 (knot doubling) を繰り返し実行することと言い換えることができる.

3.3 細分割曲線の性質

細分割曲線の性質, 例えば細分割を無限回繰り返した極限点の位置や C^1, C^2 といった曲線の連続性は行列 \mathbf{S}^l により定まる. そのため \mathbf{S}^l は細分割行列と呼ばれる. ここでは 3 次 B-spline 細分割曲線の極限点の計算法について述べる. 式 (7) より, 細分割深さ j の連続する 3 つの制御点 $\mathbf{p}_0^j = (p_{-1}^j, p_0^j, p_1^j)$ は, 細分割深さ $j-1$ の連続する 3 つの制御点 $\mathbf{p}_0^{j-1} = (p_{-1}^{j-1}, p_0^{j-1}, p_1^{j-1})$ と局所細分割行列 \mathbf{L} を用いて,

$$\mathbf{p}_0^j = \mathbf{L}\mathbf{p}_0^{j-1}$$

と表せる. ここで,

$$\mathbf{L} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

である. したがって, 無限回細分割した曲線の制御点 $\mathbf{p}_0^\infty = (p_{-1}^\infty, p_0^\infty, p_1^\infty)$ は,

$$\mathbf{p}_0^\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} (\mathbf{L})^j \mathbf{p}_0^0$$

となる. 行列の無限回の累乗は固有値や固有ベクトルと密接に関係しており, \mathbf{L} の場合その固有値は $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1/2, 1/4)$, それらに対応する右固有ベクトルは, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 2)^T$ である. $\lambda_1 = 1$ であり, 他の固有値が 1 より小さいことから,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^\infty &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\mathbf{L})^j \mathbf{p}_0^0 \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\mathbf{L})^j (a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (a_1 (\lambda_1)^j \mathbf{v}_1 + a_2 (\lambda_2)^j \mathbf{v}_2 + a_3 (\lambda_3)^j \mathbf{v}_3) \\ &= a_1 \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

したがって, \mathbf{v}_1 の中央の値が 1 であることから, 極限点 p_0^∞ は a_1 として与えられる. a_1 は最大の固有値に対応する主左固有ベクトルにより計算され, \mathbf{L} に対しては $\mathbf{u}_1 = 1/6(1, 4, 1)$ として与えられ,

$$\begin{aligned} p_0^\infty &= \mathbf{u}_1 \mathbf{p}_0^0 \\ &= \frac{p_{-1}^0 + 4p_0^0 + p_1^0}{6}. \end{aligned}$$

本節では細分割曲線に対して固有値解析を行ったが, 細分割曲面に対しても \mathbf{L} に対応する行列 (細分割マスク) が存在しその性質を決定している.

細分割曲線や曲面に対する固有値解析の詳細については, 例えば参考文献¹⁴⁾を参照されたい.

4. 細分割曲面

Chaikin のアルゴリズムは Catmull と Clark や Doo と Sabin に曲面を生成するために細分割を用いることを思いつかせた. 細分割による曲面の生成が画期的であるのは任意の位相を持つ滑らかな曲面が構成できる点にある.

細分割曲線が制御ポリゴンを繰り返し精緻化して生成されるのと同じように, 細分割曲面は, 制御多面体 (あるいは, 制御メッシュ) M^0 を精緻化し, より細かなメッシュから成る M^1, M^2, \dots を順次生成し, その極限曲面:

$$\sigma := \lim_{j \rightarrow \infty} M^j$$

として定義される. 曲線の細分割の生成手順のように, 曲面の細分割も分割 (splitting) と平均化 (averaging) の処理から成る. 曲面の場合も分割処理に 2 つの異なる手法: 面を分割する face scheme と, 頂点を分割する vertex scheme がある. 図 3 に示す Catmull と Clark により開発された細分割曲面¹⁾は面を分割する face scheme の 1 つの手法であり, テンソル積双 3 次 B-spline 曲面の拡張になっている. Doo と Sabin の細分割曲面⁴⁾(図 4 参照) は vertex scheme の 1 つの手法であり, テンソル積双 2 次 B-spline 曲面の拡張になっている.

ここでは, face scheme の代表的な例である Catmull-Clark 曲面について取り上げる. face scheme は細分割により新たに生

成されるポリゴンが三角形である場合と四角形である場合に分類される。四角形はそれに含まれる頂点が同一平面上にある必要はない。図 3 に示したように、Catmull-Clark 曲面では新たに生成されるポリゴンは四角形である。

4.1 Catmull-Clark 曲面

Catmull-Clark 曲面の細分割規則は以下のように記述される

1). n 角形の面の細分割規則は、

1. 各面に対して、面を構成するすべての頂点の平均をその座標とする新しい面点 (face point) を生成する。
2. 各稜線に対して、稜線の端点の頂点とその稜線の両側の新しい面点の平均をその座標とする新しい稜線点 (edge point) を生成する。
3. 頂点 (vertex point) の座標を以下の式により更新する:

$$\frac{Q}{n} + \frac{2R}{n} + \frac{S(n-3)}{n}.$$

ここで、 Q はその頂点に隣接するすべての新しい面点の平均であり、 R はその頂点を端点として持つ古い稜線の midpoint の平均、 S は頂点の元の座標である。

Catmull-Clark 曲面と双 3 次 B-spline 曲面の関係を明らかにするために、面の角数 $n = 4$ の場合の手順を考察する。双 3 次 B-spline 曲面の制御点を $p_{i,j}^0$ ($i, j = \dots, -1, 0, 1, \dots$) とすると、新しい面点 $p_{2i+1,2j+1}^1$ は、

$$\begin{aligned} p_{2i+1,2j+1}^1 &= \frac{1}{4}(p_{i,j}^0 + p_{i+1,j}^0 + p_{i,j+1}^0 + p_{i+1,j+1}^0) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_{i,j}^0 + \frac{1}{2}p_{i+1,j}^0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_{i,j+1}^0 + \frac{1}{2}p_{i+1,j+1}^0\right) \end{aligned}$$

により計算され、これは曲面の 2 つのパラメータ u, v の各方向に式 (4) を順次適用したことに対応する。新しい稜線点 $p_{2i+1,2j}$ は、

$$\begin{aligned} p_{2i+1,2j}^1 &= \frac{3}{8}(p_{i,j}^0 + p_{i+1,j}^0) \\ &\quad + \frac{1}{16}(p_{i,j-1}^0 + p_{i+1,j-1}^0 + p_{i,j+1}^0 + p_{i+1,j+1}^0) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(p_{i,j-1}^0 + p_{i+1,j-1}^0) + 6\frac{1}{2}(p_{i,j}^0 + p_{i+1,j}^0) + \frac{1}{2}(p_{i,j+1}^0 + p_{i+1,j+1}^0)\right) \end{aligned}$$

と計算される。これは u 方向に式 (4) を、 v 方向に式 (3) を適用したことに対応する。興味のある読者は頂点の新たな座標も同様な手順で計算できることを確認されたい。これまでの議論で Catmull-Clark 曲面の初期メッシュがすべて四角形で規則的に配置されている場合には双 3 次 B-spline 曲面に一致することがわかる。

4.2 細分割曲面の分類

これまで説明したように、Catmull-Clark 曲面や Doo-Sabin 曲面は他に先駆けて提案された細分割曲面であることや、B-spline 曲面の拡張となっていることからよく知られているが、それらの曲面以外にも様々な細分割曲面がこれまでに提案されている。

細分割曲面は以下の 4 つの基準により分類することができる¹⁷⁾:

1. 精緻化の型 (face scheme, あるいは vertex scheme),
2. 生成されるメッシュの型 (三角形, あるいは四角形),
3. 近似, あるいは内挿,
4. 規則的メッシュの極限曲面の連続性 (C^1 , あるいは C^2 等).

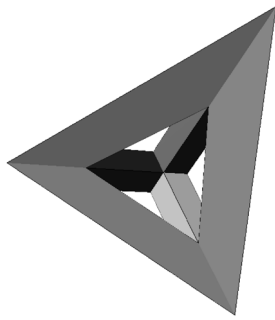
face scheme に属する曲面として、近似である Loop⁹⁾(C^2 , 三角形), Catmull-Clark(C^2 , 四角形), 内挿である Modified Butterfly⁵⁾(C^1 , 三角形), Kobbelt⁷⁾(C^1 , 四角形) が代表的である。vertex scheme に属する曲面として、近似である Doo-Sabin や Midedge¹¹⁾(ともに C^1), Biquartic¹²⁾(C^3) がある。これらの分類法にうまく適合しない $\sqrt{3}$ 細分割曲面⁸⁾ や $4-k$ メッシュの細分割¹⁶⁾ といった新たな曲面も考案されている。また、細分割曲面に knot の考えを導入し NURBS を拡張させた NURSS(Non-Uniform Recursive Subdivision Surface)¹³⁾ も提案されている。Catmull-Clark 曲面と Doo-Sabin 曲面との関係は参考文献¹⁰⁾ を参照していただければ幸いである。

5. おわりに

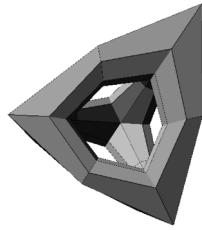
この解説ではおもに B-spline と細分割曲線・曲面との関係を述べるにとどまった。細分割曲面は豊かな数学的理論を背景として持ち、例えば多重解像度解析や多重グリッド法とも密接な関係がある。興味のある読者は参考文献に挙げた書籍^{14, 15)}, あるいは SIGGRAPH のコースノート¹⁷⁾ 等を参照されたい。

参考文献

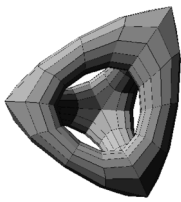
- 1) E. Catmull, and J. Clark, "Recursively Generated B-spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes," *Computer-aided Design*, Vol.10, No.6, pp.350-355, 1978.
- 2) G. Chaikin, "An Algorithm for High-Speed Curve Generation," *Computer Graphics and Image Processing*, No.3, pp.346-349, 1974.
- 3) T. DeRose, M. Kass, and T. Truong, "Subdivision Surfaces in Character Animation," *Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH '98)*, Vol. 32, pp.85-94, July, 1998.
- 4) D. Doo, and M. Sabin, "Behaviour of Recursive Division Faces Near Extraordinary Points," *Computer-aided Design*, Vol.10, No.6, pp.356-360, 1978.
- 5) N. Dyn, J.A. Gregory and D. Levin, "A Four-Point Interpolatory Subdivision Scheme for Curve Design," *Computer Aided Geometric Design*, Vol.4, pp.257-268, 1987.
- 6) G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*, 5th Ed., Academic Press, 2002.
- 7) L. Kobbelt, "Interpolatory Subdivision on Open Quadrilateral Nets with Arbitrary Topology," In Proceedings of Eurographics 96, Computer Graphics Forum, pp.409-420, 1996.
- 8) L. Kobbelt, " $\sqrt{3}$ Subdivision," *Computer Graphics Processings, Annual Conference Series*, pp.103-112, 2000.
- 9) C. Loop, "Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles," Master's thesis, University of Utah, Department of Mathematics, 1987.
- 10) K.T. Miura, F. Cheng and L. Wang, "Fine Tuning: Curve and Surface Deformation by Scaling Derivatives," *Proc. Pacific Graphics 2001*, pp.150-159, 2001.
- 11) J. Peters and U. Reif, "The Simplest Subdivision Scheme for Smoothing Polyhedra," *ACM Trans. Gr.*, Vol.16, No.4, 1997.
- 12) R. Qu, *Recursive Subdivision Algorithms for Curve and Surface Design*, PhD thesis, Brunel University, 1990.
- 13) T.W. Sederberg, J. Zheng, D. Sewell and M. Sabin, "Non-Uniform Recursive Subdivision Surfaces," *Computer Graphics (Proc. of SIGGRAPH '98)* Vol. 32, pp.387-394, July, 1998.
- 14) E.J. Stollnitz, T.D. Deroose and D.H. Salesin, *Wavelets for Computer Graphics*, Morgan Kaufmann, 1996.
- 15) J. Warren and H. Weimer, *Subdivision Methods for Geometric Design*, Morgan Kaufmann, 2002.
- 16) L. Velho and J. Gomes, "Quasi 4-8 Subdivision Surfaces," In XII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing, 1999.
- 17) D. Zorin and P. Schröder, *Subdivision for Modeling and Animation*, ACM SIGGRAPH 2000, Course Note No.23, 2000.



(a) 初期制御メッシュ: M^0



(b) 細分割深さ 1: M^1

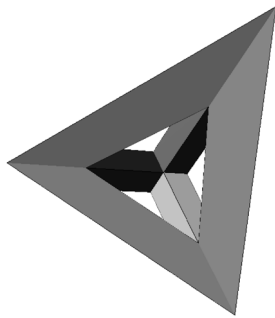


(c) 細分割深さ 2: M^2

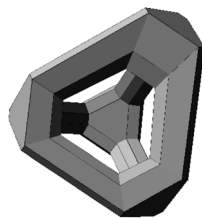


(d) 極限曲面: $\sigma = M^\infty$

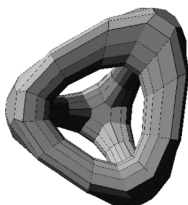
Fig. 3 Catmull-Clark 細分割曲面



(a) 初期制御メッシュ: M^0



(b) 細分割深さ 1: M^1



(c) 細分割深さ 2: M^2



(d) 極限曲面: $\sigma = M^\infty$

Fig. 4 Doo-Sabin 細分割曲面